

CONSTANTIN STRÎMBU

**SEMNALE ȘI CIRCUITE
ELECTRONICE**

**CIRCUITE DE PRELUCRARE
A SEMNALELOR**

Editura Academiei Forțelor Aeriene “Henri Coandă”
BRAȘOV

Copyright 2010

Editura Academiei Forțelor Aeriene “Henri Coandă”

Str. Mihai Viteazul nr. 160 BRAȘOV- ROMÂNIA

Tel. +40268423421

e-mail: secretariat@afahc.ro

Semnale și Circuite Electronice – Circuite de prelucrare a semnalelor –
Constantin STRÎMBU

Toate drepturile rezervate

Editurii Academiei Forțelor Aeriene “Henri Coandă”, Brașov

Referent științific:

Procesare text:

Multiplicare:

Conf. dr. ing. Marian PEARSICĂ

Autorii

Ioan Burian

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României

STRÎMBU, CONSTANTIN

Semnale și Circuite Electronice – Circuite de
prelucrare a semnalelor/ Constantin STRÎMBU;

Brașov: Editura Academia Forțelor Aeriene “Henri Coandă”,
2010;

Bibliogr.

ISBN 978-973-8415-46-1

621.374.621.38

Nr. c-dă: 71/16.07.2007

CUPRINS

3. Cuadripoli	5
3.1. Noțiuni introductive	5
3.2. Parametrii matriceali ai diporților.	6
3.2.1. Parametrii impedanță	7
3.2.2. Parametrii admitanță	9
3.2.3. Parametrii fundamentali (de lanț)	12
3.2.4. Parametrii hibridi	14
3.2.5. Parametrii fundamentali inverși	16
3.2.6. Parametrii hibridi inverși	17
3.3. Exemple de cuadripoli	19
3.3.1. Parametrii de cuadripol ai unui atenuator serie	20
3.3.2. Parametrii de cuadripol ai unui atenuator paralel	22
3.3.3. Parametrii de cuadripol ai unui atenuator ai unui atenuator nesimetric în T	24
3.3.4. Parametrii de cuadripol ai unui tranzistor bipolar	25
3.4. Utilizarea parametrilor matriceali la interconectarea diporților	31
3.4.1. Legarea în serie a diporților	31
3.4.2. Legarea în paralel a diporților	34
3.4.3. Legarea în serie-paralel a diporților	37
3.4.4. Legarea în cascadă a diporților	38
3.5. Parametrii diporților închiși pe terminații ideale	41
3.5.1. Adaptare la poartă	41
3.5.2. Rețele simple de adaptare de impedanțe	45
3.5.3. Rețele de adaptare utilizate la eliminarea oscilațiilor nedorite	46
3.5.4. Parametrii imagine. Generalități	47
3.5.5. Legătura parametrilor imagine cu parametrii fundamentali	50
3.5.6. Parametrii iterativi	52
3.5.7. Legătura parametrilor iterativi cu parametrii fundamentali	55
3.6. Parametrii de lucru ai diporților	56
3.6.1. Impedanța de intrare	56
3.6.2. Atenuarea compusă	60
3.6.3. Atenuarea de inserție	64
3.6.4. Exemple de calcul	65
3.7. Relații dintre diporți	68
3.8. Atenuatoare	70
4. Circuite oscilante	77
4.1. Oscilații libere	77
4.1.1. Generalități	77
4.1.2. Oscilațiile circuitului electric ideal	77
4.1.3. Oscilațiile circuitului electric real	83
4.2. Oscilații forțate în circuitul serie (C.O.S.)	92
4.2.1. Generalități	92
4.2.2. Analiza în timp a circuitului	92
4.2.3. Reprezentări fazoriale și liniare (forme de undă)	100
4.2.4. Fenomenul de rezonanță	105
4.2.5. Selectivitatea C.O.S.	112
4.2.6. Curba universală de rezonanță	119
4.2.7. Aplicațiile C.O.S.	123

4.3. Oscilații forțate în circuitul derivație (C.O.D.)	131
4.3.1. Analiza în timp a circuitului	131
4.3.2. Fenomenul de rezonanță	142
4.3.3. Selectivitatea C.O.D.	159
5. Circuite de prelucrare a impulsurilor	161
5.1. Comportarea în c.c. a circuitelor R, L și R, C serie	161
5.1.1. Circuitul R, L serie în c.c.	161
5.1.2. Circuitul R, C serie în c.c.	167
5.2. Circuite de derivare (diferențiere)	173
5.2.1. Circuitul de derivare R,C	173
5.2.2. Circuitul de derivare R,L	177
5.2.3. Comparații între circuitele de derivare R,C și R,L	178
5.3. Circuite de integrare	178
5.3.1. Circuitul de integrare R,C	179
5.3.2. Circuitul de integrare R,L	181
5.3.3. Comparații între circuitele de integrare R,C și R,L	182
5.4. Circuite de separare	183
5.5. Circuite de limitare	185
5.5.1. Limitatoare de maxim	185
5.5.2. Limitatoare de minim	192
Bibliografie	199

3. CUADRIPOLI

3.1. Noțiuni introductive

Analiza rețelelor electrice, (obținerea ecuațiilor de evoluție precum și a soluțiilor corespunzătoare), se poate face în mod sistematic utilizând o serie de proprietăți ale rețelelor electrice, care depind doar de geometria sistemului considerat. Asemenea proprietăți se numesc proprietăți topologice.

În continuare sunt prezentate modelele ideale utilizate pentru reprezentarea funcțiilor de bază ale sistemelor analogice.

Componentele oricărui sistem sunt interconectate formând o rețea electrică la care bornele sunt grupate câte două, în porți: poarta de intrare, la care se conectează sursele (semnalele de excitație) și cea de ieșire la care se culeg semnalele răspuns. Un astfel de circuit se numește multiport. În figura 3.1 sunt prezentate trei exemple de astfel de multiporturi:

- n-port, în figura 3.1.a
- diport, în figura 3.1.b
- uniport, în figura 3.1.c

În literatură, se întâlnește și o altă variantă de denumire a acestor circuite, funcție de numărul de poli (conexiuni) ale acestora, astfel:

- 2n-pol, în figura 3.1.a
- cuadripol, în figura 3.1.b
- dipol, în figura 3.1.c

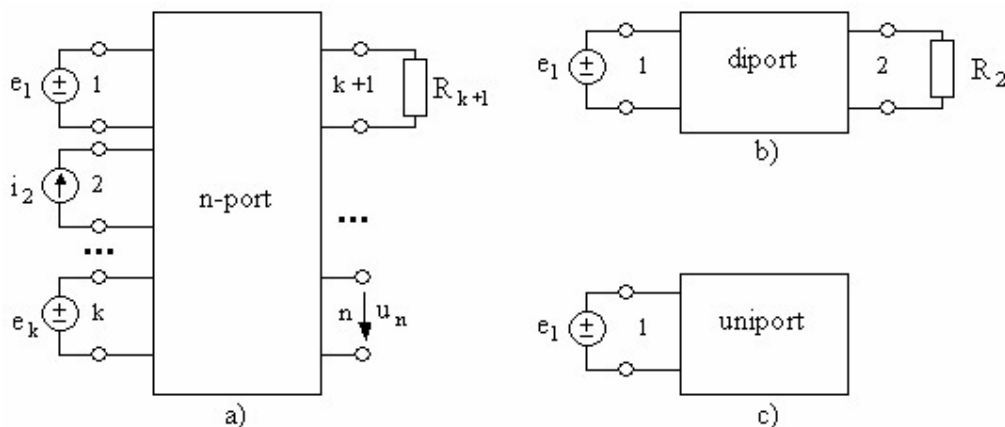


Fig. 3.1. Sisteme de tip: n-port, 2n-pol (a); diport, cuadripol (b); uniport, dipol (c);

Componentele, circuitele sau sistemele pot fi active sau pasive. Pasivitatea se definește în raport cu energia de la porți. Fie $u_k(t)$ și $i_k(t)$ semnalele, $p_k = u_k i_k$, puterea și E_k energia la poarta k a sistemului. Expresia energiei este:

$$E(t) = \int_{-\infty}^t u_k(\tau) i_k(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^t p_k(\tau) d\tau \quad (3.1)$$

Energia totală a sistemului este:

$$E = \sum_{k=1}^n E_k, \forall t \in \mathbf{R} \quad (3.2)$$

Analizând expresia (3.2) se constată că:

- $\sum_{k=1}^n E_k > 0, \forall t \in \mathbf{R}$, sistemul este pasiv, consumă energie;
- $\sum_{k=1}^n E_k < 0, \forall t \in \mathbf{R}$, sistemul este activ, generează energie;
- $\sum_{k=1}^n E_k = 0, \forall t \in \mathbf{R}$, sistemul este reactiv;

În cadrul cursului de față se face referire doar la aspecte ale utilizării diporților în transmiterea semnalelor. După cum s-a arătat diporții numiți și cuadripoli, sunt rețele cu două porți (cu două perechi de poli).

În cele mai multe cazuri circuitele pot fi considerate ca niște cuadripoli (diporți) ce prezintă patru borne de acces specializate: două borne reprezintă poarta de intrare (1, respectiv 1'), iar alte două poarta de ieșire (2, respectiv 2'). Semnalul aplicat la intrare se va numi excitație, iar cel obținut la ieșire răspuns. Evident răspunsul circuitului C_i poate fi semnal (de intrare) pentru diportul C_{i+1} situat în aval de C_i ; în mod asemănător semnalul de intrare al circuitului C_i poate fi răspunsul circuitului C_{i-1} aflat în amonte de C_i .

În sistemele de comunicații semnalul electric (inițial) ce trebuie prelucrat provine de obicei de la un traductor, de exemplu de la un microfon, care transformă o mărime neelectrică în una electrică. Studiului traductoarelor nu face obiectul cursul de față, de aceea se va considera că la intrarea circuitelor se aplică un semnal electric.

3.2. Parametrii matriceali ai diporților

Analiza diporților în raport cu semnalele ce apar la cele două porți conduce la stabilirea ecuațiilor de legătură între semnalele de excitație și cele de răspuns.

Reprezentarea cea mai generală a unui diport este arătată în figura 3.2 unde se indică sensul convențional **ales**, pentru semnalele de la intrare și ieșire.

Atunci când se dorește a se exprima legătura intrare-ieșire, este indicat să se atribuie sensul real curentului I_2 (săgeată desenată punctat în figura 3.2). În ecuațiile matematice se face substituția $I_2 \rightarrow -I_2$.

Curentul care intră prin borna 1 trebuie să fie egal cu curentul care iese prin borna 1'. Același lucru trebuie spus și despre curenții corespunzători bornelor 2 și 2', deoarece se presupune că rețelele pasive sau active conectate la aceste borne sunt independente.

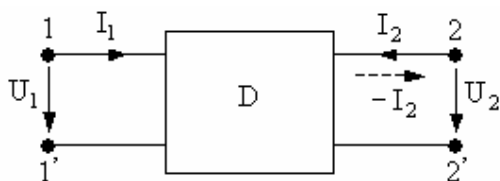


Fig. 3.2. Sensul convențional ales pentru semnalele de la porțile diportului D

Analiza funcționării diporților este realizată în domeniul frecvență. În cazul particular (doar acest caz este tratat în cursul de față) al diporților cu componente liniare, este indicat să se facă **analiza diportului în raport cu transformatele Laplace ale semnalelor**.

În acest caz relațiile între transformatele semnalelor conduc la ecuații liniare. În figura 3.2 **transformatele Laplace ale semnalelor sunt notate cu litere mari**, semnalele de intrare fiind U_1, I_1 , iar cele de ieșire U_2, I_2 .

Comportarea diporților poate fi apreciată fără a ține seama de structura internă a acestora, exprimând relațiile de legătură între cele patru semnale. Deoarece circuitele care alcătuiesc schemele diporților sunt considerate liniare, același tip de relații se pot stabili și între semnale. Considerând că două dintre semnale sunt variabil independente se vor putea exprima $C_4^2 = 6$ familii de relații între semnale. Fiecărei din aceste relații îi va corespunde un set de parametri de cuadripoli.

Observații:

- Parametrii de cuadripol sunt măsurabili, fiind determinați prin măsurători electrice la bornele (terminalele) dispozitivelor.
- Parametrii de cuadripol **nu** descriu **comportarea în timp** a dispozitivelor.

3.2.1. Parametrii impedanță

Prin intermediul parametrilor impedanță se exprimă tensiunile de intrare, respectiv ieșire funcție de curenți (considerați în acest caz mărimi independente). Relația dintre tensiuni și curenți este următoarea:

$$\begin{cases} U_1 = z_{11}I_1 + z_{12}I_2 \\ U_2 = z_{21}I_1 + z_{22}I_2 \end{cases} \quad (3.3)$$

Relația (3.3) poate fi exprimată matriceal introducând matricele unicoloră pentru tensiuni și curenți:

$$[U] = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}, [I] = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Se definește matricea parametrilor impedanță astfel:

$$[Z] = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Relația dintre tensiuni și curenți poate fi definită matriceal astfel:

$$[U] = [Z][I] \text{ sau } U = ZI \quad (3.6)$$

Mărimile $z_{11}, z_{12}, z_{21}, z_{22}$ au dimensiuni de impedanță și se numesc parametrii impedanță ai diporțului.

Semnificația fizică a parametrilor impedanță rezultă simplu din (3.3), astfel:

- z_{11} , impedanța de intrare cu ieșirea în gol ($I_2 = 0$)

$$z_{11} = \left. \frac{U_1}{I_1} \right|_{I_2=0} \quad (3.7)$$

În figura 3.3. se prezintă schema de principiu utilizată la determinarea z_{11} .

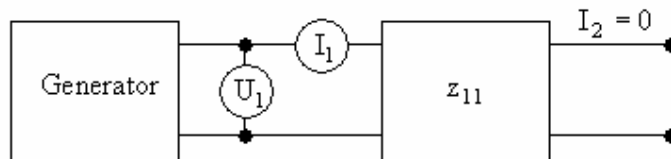


Fig. 3.3. Schema de principiu utilizată la determinarea z_{11}

Se observă că voltmetrul nu măsoară tensiunea de la intrarea diportului ci pe cea de la ieșirea generatorului. Aceasta este egală cu suma dintre tensiunea de la intrarea diportului și căderea de tensiune de pe ampermetrul ce măsoară curentul I_1 .

Concret, pentru determinarea acestui parametru se utilizează schema din figura 3.4, în care curentul de intrare I_1 se măsoară indirect, prin determinarea căderii de tensiune de pe o rezistență cunoscută, R.

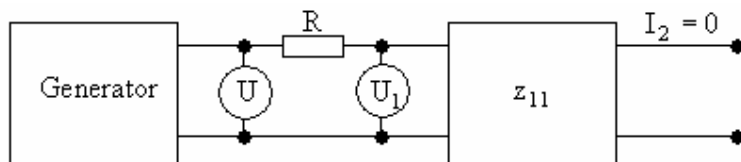


Fig. 3.4. Schema de măsurare utilizată la determinarea Z_{11}

- z_{22} , impedanța de ieșire cu intrarea în gol ($I_1 = 0$)

$$z_{22} = \frac{U_2}{I_2} \Big|_{I_1=0} \quad (3.8)$$

În figura 3.5. se prezintă schema de principiu utilizată la determinarea z_{22} .

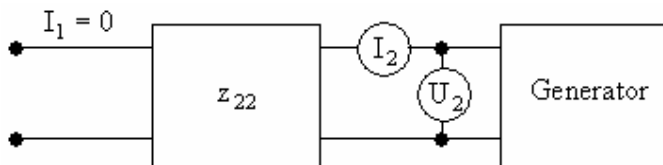


Fig. 3.5. Schema de principiu utilizată la determinarea Z_{22}

Concret, pentru determinarea acestui parametru se utilizează o schemă analogă determinării impedanței de intrare cu ieșirea în gol, în care curentul I_2 se măsoară indirect, prin determinarea căderii de tensiune de pe o rezistență cunoscută, R.

- z_{12} , impedanța de transfer, cu intrarea în gol ($I_1 = 0$)

$$z_{12} = \frac{U_1}{I_2} \Big|_{I_1=0} \quad (3.9)$$

În figura 3.6. se prezintă schema de principiu utilizată la determinarea z_{12} .

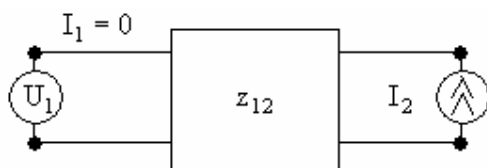


Fig. 3.6. Schema de principiu utilizată la determinarea Z_{12}

- z_{21} , impedanța de transfer, cu ieșirea în gol ($I_2 = 0$)

$$z_{21} = \left. \frac{U_2}{I_1} \right|_{I_2=0} \quad (3.10)$$

În figura 3.7. se prezintă schema de principiu utilizată la determinarea z_{21} .

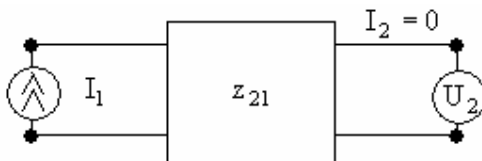


Fig. 3.7. Schema de principiu utilizată la determinarea z_{21}

Observație:

- Toți parametrii impedanță fiind definiți cu terminalele în gol, se mai numesc și *parametrii de gol ai diportului*, iar matricea \mathbf{Z} se numește *matricea parametrilor de gol*.

Definiții:

- Condiția de reciprocitate a cuadripolului

Un cuadripol este reciproc atunci când transferul semnalelor de la intrare la ieșire, respectiv de la ieșire la intrare se face identic.

$$z_{12} = z_{21} \quad (3.11)$$

- Condiția de simetrie a cuadripolului

Un cuadripol este simetric atunci când comportarea electrică la cele două porți este identică.

$$z_{11} = z_{22} \quad (3.12)$$

3.2.2. Parametrii admitanță

Prin intermediul parametrilor admitanță se exprimă curenții de intrare, respectiv ieșire funcție de tensiunile (considerate în acest caz mărimi independente). Relația dintre curenți și tensiuni este următoarea:

$$\begin{cases} I_1 = y_{11}U_1 + y_{12}U_2 \\ I_2 = y_{21}U_1 + y_{22}U_2 \end{cases} \quad (3.13)$$

Relația (3.13) poate fi exprimată matriceal introducând matricele coloană pentru tensiuni și curenți:

$$[\mathbf{I}] = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}, [\mathbf{U}] = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Se definește matricea parametrilor admitanță astfel:

$$[\mathbf{Y}] = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Relația dintre tensiuni și curenți poate fi definită matriceal astfel:

$$[\mathbf{I}] = [\mathbf{Y}][\mathbf{U}] \text{ sau } \mathbf{I} = \mathbf{YU} \quad (3.16)$$

Mărimile $y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{22}$ au dimensiuni de admitanță și se numesc parametrii admitanță ai diportului.

Observație:

➤ Toți parametrii admitanță sunt definiți cu terminalele în scurtcircuit (*terminalele* sunt în scurtcircuit doar în c.a.). În acest caz parametrii se numesc *parametrii de scurtcircuit*, iar matricea \mathbf{Y} se numește *matricea parametrilor de scurtcircuit*.

Semnificația fizică a parametrilor admitanță rezultă din relația (3.13), astfel:

➤ y_{11} , admitanță de intrare cu ieșirea în scurtcircuit ($U_2 = 0$)

$$y_{11} = \left. \frac{I_1}{U_1} \right|_{U_2=0} \quad (3.17)$$

În figura 3.8. se prezintă schema de principiu utilizată la determinarea y_{11} .

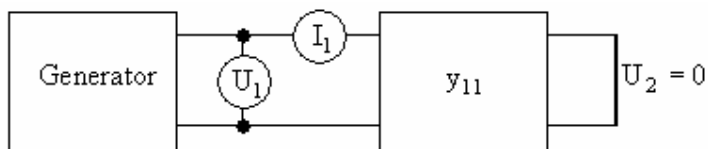


Fig. 3.8. Schema de principiu utilizată la determinarea y_{11}

Concret, curentul I_1 se măsoară indirect (determinând căderea de tensiune de pe o rezistență cunoscută, R) la fel ca în cazul schemelor utilizate pentru parametrii impedanță (vezi figura 3.4).

➤ y_{22} , admitanța de ieșire cu intrarea în scurtcircuit ($U_1 = 0$)

$$y_{22} = \left. \frac{I_2}{U_2} \right|_{U_1=0} \quad (3.18)$$

În figura 3.9. se prezintă schema de principiu utilizată la determinarea y_{22} .

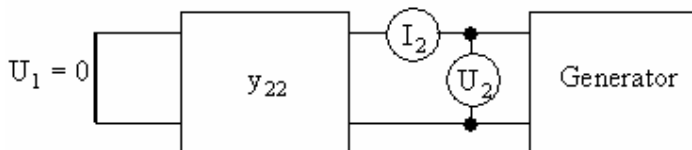


Fig. 3.9. Schema de principiu utilizată la determinarea y_{22}

➤ y_{12} , admitanța de transfer, cu intrarea în scurtcircuit ($U_1 = 0$)

$$y_{12} = \left. \frac{I_1}{U_2} \right|_{U_1=0} \quad (3.19)$$

În figura 3.10. se prezintă schema de principiu utilizată la determinarea y_{12} .

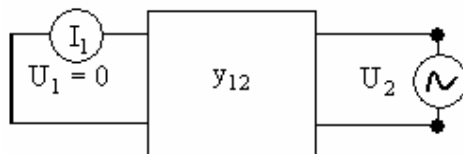


Fig. 3.10. Schema de principiu utilizată la determinarea y_{12}

- y_{21} , impedanța de transfer, cu ieșirea în scurtcircuit ($U_2 = 0$)

$$y_{21} = \left. \frac{I_2}{U_1} \right|_{U_2=0} \quad (3.20)$$

În figura 3.11. se prezintă schema de principiu utilizată la determinarea y_{21} .

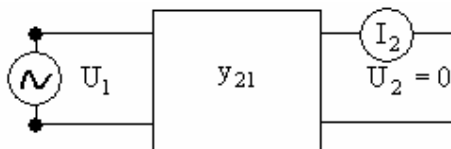


Fig. 3.11. Schema de principiu utilizată la determinarea y_{21}

Observații:

Prin dualitate cu condițiile de reciprocitate, respectiv simetrie definite din punctul de vedere al parametrilor de impedanță, se definesc aceleași condiții din punctul de vedere al parametrilor admitanță astfel:

- Condiția de reciprocitate a cuadripolului

$$y_{12} = y_{21} \quad (3.21)$$

- Condiția de simetrie a cuadripolului

$$y_{11} = y_{22} \quad (3.22)$$

Legătura dintre parametrii admitanță și cei impedanță se obține comparând relația

$$[U] = [Z][I] \text{ cu } [I] = [Y][U], \text{ astfel:}$$

$$[I] = [Y][U] \Leftrightarrow [Y]^{-1}[I] = [Y]^{-1}[Y][U] \Leftrightarrow [Y]^{-1}[I] = [U] \quad (3.23)$$

Cum $[U] = [Z][I]$ sau $[Z][I] = [U]$ rezultă că:

$$[Z] = [Y]^{-1} \quad (3.24)$$

Matricele $[Z]$ și $[Y]$ sunt inverse una în raport cu cealaltă. Scriind relația (3.24) explicit, rezultă că:

$$\begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta y} \begin{bmatrix} y_{22} & -y_{12} \\ -y_{21} & y_{11} \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

unde s-a utilizat notația

$$\Delta y = \det y = y_{11}y_{22} - y_{12}y_{21} \quad (3.26)$$

În acest mod se poate găsi legătura între oricare dintre elementele matricei $[Z]$ și $[Y]$.

Procedând în sens invers se găsește legătura dintre elementele matricei $[Y]$ și $[Z]$.

Important

- $z_{11} \neq \frac{1}{y_{11}}$, ceea ce este evident din (3.25).
- Chiar dacă unitățile de măsură pentru z_{11} și $\frac{1}{y_{11}}$ sunt aceleași (ambele fiind

impedanțe) ele sunt din punct de vedere fizic diferite, deoarece z_{11} se definește în

condiții de gol la ieșire iar $\frac{1}{y_{11}}$ în condiții de scurtcircuit la ieșire.

- Legătura dintre matricea parametrilor impedanță și admitanță este următoarea:

$$\det \mathbf{y} = y_{11}y_{22} - y_{12}y_{21} = \frac{1}{\det \mathbf{z}} = \frac{1}{z_{11}z_{22} - z_{12}z_{21}} \quad (3.27)$$

3.2.3. Parametrii fundamentali (de lanț)

Prin intermediul parametrilor fundamentali se exprimă mărimile de la intrarea diportului (I_1, U_1) funcție de mărimile de la ieșire (I_2, U_2). Exprimând legătura intrare-ieșire este indicat să se atribuie sensul real curentului I_2 , atunci când sursa de semnal este așa cum s-a presupus la poarta de intrare. În acest caz sensul real curentului I_2 este indicat de săgeata desenată punctat din figura 3.2. În ecuațiile matematice se va face substituția $I_2 \rightarrow -I_2$.

Relația intrare-ieșire este următoarea:

$$\begin{cases} U_1 = A_{11}U_2 - A_{12}I_2 \\ I_1 = A_{21}U_2 - A_{22}I_2 \end{cases} \quad (3.28)$$

Se definește matricea parametrilor fundamentali astfel:

$$[\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

Relația (3.28) poate fi definită matriceal astfel:

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = [\mathbf{A}] \begin{bmatrix} U_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

Semnificația fizică a parametrilor fundamentali rezultă din relația (3.28), astfel:

- A_{11} , factor de transfer în tensiune cu ieșirea în gol ($I_2 = 0$)

$$A_{11} = \left. \frac{U_1}{U_2} \right|_{I_2=0} \quad (3.31)$$

În figura 3.12. se prezintă schema de principiu utilizată la determinarea A_{11} .

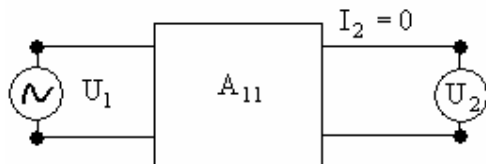


Fig. 3.12. Schema de principiu utilizată la determinarea A_{11}

- A_{22} , factor de transfer în curent cu ieșirea în scurtcircuit ($U_2 = 0$)

$$A_{22} = -\frac{I_1}{I_2} \Big|_{U_2=0} \quad (3.32)$$

În figura 3.13. se prezintă schema de principiu utilizată la determinarea A_{22} .

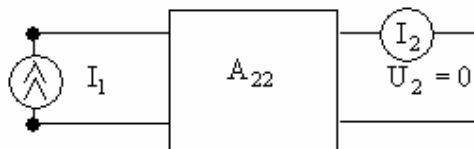


Fig. 3.13. Schema de principiu utilizată la determinarea A_{22}

- A_{12} , impedanță de transfer, cu intrarea în scurtcircuit ($U_1 = 0$)

$$A_{12} = -\frac{U_1}{I_2} \Big|_{U_2=0} \quad (3.33)$$

Se observă că expresia acestei impedanțe se poate scrie și în următorul mod:

$$A_{12} = -\frac{1}{\frac{I_2}{U_1} \Big|_{U_2=0}} \stackrel{(3.20)}{=} -\frac{1}{y_{21}} \quad (3.34)$$

În consecință schema de principiu utilizată la determinarea A_{12} este identică cu cea utilizată la determinarea y_{21} (vezi figura 3.11).

- A_{21} , admitanță de transfer, cu ieșirea în gol ($I_2 = 0$)

$$A_{21} = \frac{I_1}{U_2} \Big|_{I_2=0} \quad (3.35)$$

Se observă că expresia acestei admitanțe se poate scrie și în următorul mod:

$$A_{21} = \frac{1}{\frac{U_2}{I_1} \Big|_{I_2=0}} \stackrel{(3.10)}{=} \frac{1}{z_{21}} \quad (3.36)$$

În consecință schema de principiu utilizată la determinarea A_{21} este identică cu cea utilizată la determinarea z_{21} (vezi figura 3.7).

Observație:

➤ Deoarece toți parametrii fundamentali sunt funcții de transfer, aceștia se mai numesc *parametrii de transfer*, iar matricea \mathbf{A} se numește *matricea parametrilor de transfer*.

Legătura dintre parametrii fundamentali și cei impedanță se obține se obține explicitând relația (3.28) în raport cu U_1 și U_2 , rezultând că:

$$\begin{cases} U_1 = \frac{A_{11}}{A_{21}} I_1 + \frac{\Delta A}{A_{21}} I_2 \\ U_2 = \frac{1}{A_{21}} I_1 + \frac{A_{22}}{A_{21}} I_2 \end{cases} \quad (3.37)$$

unde

$$\Delta \mathbf{A} = \det \mathbf{A} = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} \quad (3.38)$$

În concluzie se poate scrie că:

$$\begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{A_{11}}{A_{21}} & \frac{\Delta A}{A_{21}} \\ \frac{1}{A_{21}} & \frac{A_{22}}{A_{21}} \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

Determinantul matricei parametrilor fundamentali poate fi calculat în funcție de parametrii impedanță, respectiv admitanță, astfel:

$$\Delta \mathbf{A} = \det \mathbf{A} = \frac{z_{12}}{z_{21}} = \frac{y_{12}}{y_{21}} \quad (3.40)$$

Observații:

Prin dualitate cu condițiile de reciprocitate, respectiv simetrie definite din punctul de vedere al parametrilor de impedanță, se definesc aceleași condiții din punctul de vedere al parametrilor fundamentali, utilizând (3.39) astfel:

$$\begin{aligned} &\text{➤ Condiția de reciprocitate a cuadripolului } (z_{12} = z_{21}) \\ &\Delta A = 1 \end{aligned} \quad (3.41)$$

$$\begin{aligned} &\text{➤ Condiția de simetrie a cuadripolului } (z_{11} = z_{22}) \\ &A_{11} = A_{22} \end{aligned} \quad (3.42)$$

3.2.4. Parametrii hibridi

Parametrii hibridi au o largă utilizare în descrierea schemelor cu tranzistoare. Sistemul de ecuații cu parametrii hibridi (numiți astfel deoarece leagă tensiunea de intrare și curentul de ieșire cu celelalte două semnale) este următorul:

$$\begin{cases} U_1 = h_{11}I_1 + h_{12}U_2 \\ I_2 = h_{21}I_1 + h_{22}U_2 \end{cases} \quad (3.43)$$

Se definește matricea parametrilor hibridi astfel:

$$[\mathbf{h}] = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

Relația (3.42) poate fi definită matriceal astfel:

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = [\mathbf{h}] \begin{bmatrix} I_1 \\ U_2 \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

Semnificația fizică a parametrilor hibridi rezultă din relația (3.43), astfel:

$$\begin{aligned} &\text{➤ } h_{11}, \text{ impedanța de intrare cu ieșirea în scurtcircuit } (U_2 = 0) \\ &h_{11} = \left. \frac{U_1}{I_1} \right|_{U_2=0} \end{aligned} \quad (3.46)$$

Se observă că expresia acestei impedanțe se poate scrie și în următorul mod:

$$h_{11} = \frac{1}{\left. \frac{I_1}{U_1} \right|_{U_2=0}} \stackrel{(3.17)}{=} \frac{1}{y_{11}} \quad (3.47)$$

În consecință schema de principiu utilizată la determinarea h_{11} este identică cu cea utilizată la determinarea y_{11} (vezi figura 3.8).

➤ h_{22} , admitanța de ieșire cu intrarea în gol ($I_1 = 0$)

$$h_{22} = \left. \frac{I_2}{U_2} \right|_{I_1=0} \quad (3.48)$$

Se observă că expresia acestei admitanțe se poate scrie și în următorul mod:

$$h_{22} = \frac{1}{\left. \frac{U_2}{I_2} \right|_{I_1=0}} \stackrel{(3.5)}{=} \frac{1}{z_{22}} \quad (3.49)$$

În consecință schema de principiu utilizată la determinarea h_{22} este identică cu cea utilizată la determinarea z_{22} (vezi figura 3.5).

➤ h_{12} , factor de transfer în tensiune, invers, (de la ieșire la intrare), cu intrarea în gol ($I_1 = 0$)

$$h_{12} = \left. \frac{U_1}{U_2} \right|_{I_1=0} \quad (3.50)$$

În figura 3.14. se prezintă schema de principiu utilizată la determinarea h_{12} .

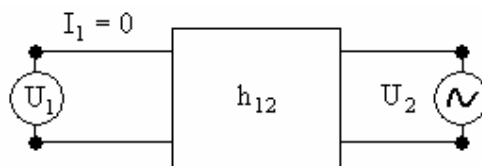


Fig. 3.14. Schema de principiu utilizată la determinarea h_{12}

➤ h_{21} , factor de transfer în curent, direct, (de la intrare la ieșire), cu ieșirea în scurtcircuit ($U_2 = 0$)

$$h_{21} = \left. \frac{I_2}{I_1} \right|_{U_2=0} \quad (3.51)$$

Se observă că expresia acestui factor de transfer se poate scrie și în următorul mod:

$$h_{21} = \frac{1}{\left. \frac{I_1}{I_2} \right|_{U_2=0}} \stackrel{(3.32)}{=} -\frac{1}{A_{22}} \quad (3.52)$$

În consecință schema de principiu utilizată la determinarea h_{21} este identică cu cea utilizată la determinarea A_{22} (vezi figura 3.13).

Legătura dintre parametrii hibridi și cei impedanță se obține se obține explicitând relația (3.43) în raport cu U_1 și U_2 , rezultând că:

$$\begin{cases} U_1 = \frac{\Delta h}{h_{22}} I_1 + \frac{h_{12}}{h_{22}} I_2 \\ U_2 = -\frac{h_{21}}{h_{22}} I_1 + \frac{1}{h_{22}} I_2 \end{cases} \quad (3.53)$$

unde

$$\Delta \mathbf{h} = \det \mathbf{h} = h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21} \quad (3.54)$$

În concluzie se poate scrie că:

$$\begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\Delta h}{h_{22}} & \frac{h_{12}}{h_{22}} \\ -\frac{h_{21}}{h_{22}} & \frac{1}{h_{22}} \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

Observații:

Prin dualitate cu condițiile de reciprocitate, respectiv simetrie definite din punctul de vedere al parametrilor de impedanță, se definesc aceleași condiții din punctul de vedere al parametrilor hibridi, utilizând (3.55) astfel:

➤ Condiția de reciprocitate a cuadripolului ($z_{12} = z_{21}$)

$$h_{12} = -h_{21} \quad (3.56)$$

➤ Condiția de simetrie a cuadripolului ($z_{11} = z_{22}$)

$$\Delta h = 1 \quad (3.57)$$

3.2.5. Parametrii fundamentali inverși

Acest set de parametri are o utilizare restrânsă. Sistemul de ecuații cu parametrii fundamentali inverși (numiți astfel deoarece leagă semnalele de ieșire cu cele de intrare) este următorul:

$$\begin{cases} U_2 = B_{11}U_1 - B_{12}I_1 \\ I_2 = B_{21}U_1 - B_{22}I_1 \end{cases} \quad (3.58)$$

Se definește matricea parametrilor fundamentali inverși astfel:

$$[\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

Relația (3.58) poate fi definită matriceal astfel:

$$\begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = [\mathbf{B}] \begin{bmatrix} U_1 \\ -I_1 \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

Determinantul matricei parametrilor fundamentali inverși poate fi calculat în funcție de parametrii impedanță, respectiv admitanță, astfel:

$$\Delta \mathbf{B} = \det \mathbf{B} = \frac{z_{12}}{z_{21}} = \frac{y_{12}}{y_{21}} \quad (3.61)$$

3.2.6. Parametrii hibridi inverși

Acest set de parametri are o utilizare restrânsă. Sistemul de ecuații cu parametrii hibridi inverși (numiți astfel deoarece leagă tensiunea de ieșire și curentul de intrare cu celelalte două semnale) este următorul:

$$\begin{cases} I_1 = g_{11}U_1 + g_{12}I_2 \\ U_2 = g_{21}U_1 + g_{22}I_2 \end{cases} \quad (3.62)$$

Se definește matricea parametrilor hibridi inverși astfel:

$$[g] = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \quad (3.63)$$

Se observă că matricea parametrilor hibridi inverși este legată de matricea parametrilor hibridi prin relația:

$$[g] = [h]^{-1} \quad (3.64)$$

Relația (3.62) poate fi definită matriceal astfel:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = [g] \begin{bmatrix} U_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (3.65)$$

În tabelul 3.2.1 este prezentată legătura dintre parametrii matriceali. Tabelul este util pentru determinarea unei familii de parametrii atunci când cealaltă familie este cunoscută.

Tabelul 3.2.1

Matrice	Denumirea parametrilor						Condiția de	
	impedanțe	admitanțe	fundamentali	hibridi	fundamentali inverși	hibridi inverși	reciprocitate	simetrie
Z	$\begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{y_{22}}{\Delta y} & -\frac{y_{12}}{\Delta y} \\ -\frac{y_{21}}{\Delta y} & \frac{y_{11}}{\Delta y} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{A_{11}}{A_{21}} & \frac{\Delta A}{A_{21}} \\ 1 & \frac{A_{22}}{A_{21}} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{\Delta h}{h_{22}} & \frac{h_{12}}{h_{22}} \\ -\frac{h_{21}}{h_{22}} & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{B_{22}}{\Delta B} & \frac{1}{B_{21}} \\ B_{21} & B_{21} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & -g_{12} \\ g_{11} & g_{11} \\ \frac{g_{21}}{g_{11}} & \frac{\Delta g}{g_{11}} \end{bmatrix}$	$z_{12} = z_{21}$	$z_{11} = z_{22}$
Y	$\begin{bmatrix} \frac{z_{22}}{\Delta z} & -\frac{z_{12}}{\Delta z} \\ \Delta z & \Delta z \\ -\frac{z_{21}}{\Delta z} & \frac{z_{11}}{\Delta z} \\ \Delta z & \Delta z \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{A_{22}}{A_{12}} & -\frac{\Delta A}{A_{12}} \\ A_{12} & A_{12} \\ 1 & \frac{A_{11}}{A_{12}} \\ -A_{12} & A_{12} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{h_{12}}{h_{11}} \\ \frac{h_{11}}{h_{21}} & \frac{\Delta h}{h_{11}} \\ \frac{h_{21}}{h_{11}} & \frac{\Delta h}{h_{11}} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{B_{11}}{\Delta B} & -\frac{1}{B_{12}} \\ B_{12} & B_{12} \\ \Delta B & \frac{B_{22}}{B_{12}} \\ -B_{12} & B_{12} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{\Delta g}{g_{22}} & \frac{g_{12}}{g_{22}} \\ g_{22} & g_{22} \\ -\frac{g_{21}}{g_{22}} & 1 \\ g_{22} & g_{22} \end{bmatrix}$	$y_{12} = y_{21}$	$y_{11} = y_{22}$
A	$\begin{bmatrix} \frac{z_{11}}{z_{21}} & \frac{\Delta z}{z_{21}} \\ z_{21} & z_{21} \\ 1 & \frac{z_{22}}{z_{21}} \\ z_{21} & z_{21} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\frac{y_{22}}{y_{21}} & -\frac{1}{y_{21}} \\ y_{21} & y_{21} \\ \frac{\Delta y}{y_{21}} & -\frac{y_{11}}{y_{21}} \\ y_{21} & y_{21} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\frac{\Delta h}{h_{21}} & -\frac{h_{11}}{h_{21}} \\ -\frac{h_{21}}{h_{22}} & -\frac{1}{h_{21}} \\ -\frac{h_{22}}{h_{21}} & -\frac{1}{h_{21}} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{B_{22}}{\Delta B} & \frac{B_{12}}{\Delta B} \\ \Delta B & \Delta B \\ \frac{B_{21}}{\Delta B} & -\frac{B_{11}}{\Delta B} \\ \Delta B & \Delta B \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & \frac{g_{22}}{g_{21}} \\ g_{21} & g_{21} \\ \frac{g_{11}}{g_{21}} & \frac{\Delta g}{g_{21}} \\ g_{21} & g_{21} \end{bmatrix}$	$\Delta A = 1$	$A_{11} = A_{22}$
h	$\begin{bmatrix} \frac{\Delta z}{z_{22}} & \frac{z_{12}}{z_{22}} \\ z_{22} & z_{22} \\ -\frac{z_{21}}{z_{22}} & \frac{1}{z_{22}} \\ z_{22} & z_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{y_{12}}{y_{11}} \\ y_{11} & y_{11} \\ \frac{y_{21}}{y_{11}} & \frac{\Delta y}{y_{11}} \\ y_{11} & y_{11} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{A_{12}}{A_{22}} & \frac{\Delta A}{A_{22}} \\ A_{22} & A_{22} \\ 1 & \frac{A_{21}}{A_{22}} \\ -A_{22} & A_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{B_{12}}{B_{11}} & \frac{1}{B_{11}} \\ B_{11} & B_{11} \\ \Delta B & \frac{B_{21}}{B_{11}} \\ -B_{11} & B_{11} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{g_{22}}{\Delta g} & -\frac{g_{12}}{\Delta g} \\ \Delta g & \Delta g \\ -\frac{g_{21}}{\Delta g} & \frac{g_{11}}{\Delta g} \\ \Delta g & \Delta g \end{bmatrix}$	$h_{12} = -h_{21}$	$\Delta h = 1$
B	$\begin{bmatrix} \frac{z_{22}}{z_{12}} & \frac{\Delta z}{z_{12}} \\ z_{12} & z_{12} \\ 1 & \frac{z_{11}}{z_{12}} \\ z_{12} & z_{12} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\frac{y_{11}}{y_{12}} & -\frac{1}{y_{12}} \\ y_{12} & y_{12} \\ \frac{\Delta y}{y_{12}} & -\frac{y_{22}}{y_{12}} \\ y_{12} & y_{12} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{A_{22}}{\Delta A} & \frac{A_{12}}{\Delta A} \\ \Delta A & \Delta A \\ \frac{A_{21}}{\Delta A} & \frac{A_{11}}{\Delta A} \\ \Delta A & \Delta A \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & \frac{h_{11}}{h_{12}} \\ h_{12} & h_{12} \\ \frac{h_{22}}{h_{12}} & \frac{\Delta h}{h_{12}} \\ h_{12} & h_{12} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\frac{\Delta g}{g_{12}} & -\frac{g_{22}}{g_{12}} \\ g_{12} & g_{12} \\ -\frac{g_{11}}{g_{12}} & -\frac{1}{g_{12}} \\ g_{12} & g_{12} \end{bmatrix}$	$\Delta B = 1$	$B_{11} = B_{22}$
g	$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{z_{12}}{z_{11}} \\ z_{11} & z_{11} \\ \frac{z_{21}}{z_{11}} & \frac{\Delta z}{z_{11}} \\ z_{11} & z_{11} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{\Delta y}{y_{22}} & \frac{y_{12}}{y_{22}} \\ y_{22} & y_{22} \\ -\frac{y_{21}}{y_{22}} & \frac{1}{y_{22}} \\ y_{22} & y_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{A_{21}}{A_{11}} & \frac{\Delta A}{A_{11}} \\ A_{11} & A_{11} \\ 1 & -\frac{A_{12}}{A_{11}} \\ A_{11} & A_{11} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{h_{22}}{\Delta h} & -\frac{h_{12}}{\Delta h} \\ \Delta h & \Delta h \\ -\frac{h_{21}}{\Delta h} & \frac{h_{11}}{\Delta h} \\ \Delta h & \Delta h \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{B_{21}}{B_{22}} & -\frac{1}{B_{22}} \\ B_{22} & B_{22} \\ \Delta B & \frac{B_{12}}{B_{22}} \\ B_{22} & B_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}$	$g_{12} = -g_{21}$	$\Delta g = 1$

3.3. Exemple de cuadripoli

În continuare se vor determina parametrii de cuadripol pentru câteva circuite. Obligatoriu, pentru a putea determina acești parametri, trebuie identificate cele două porți (de intrare, respectiv ieșire) ale circuitului. În principiu nu are nicio relevanță care din cele patru seturi de parametri (cele mai uzuale) este determinat, deoarece, conform relațiilor matematice existente între ele, sunt echivalente. Această observație este perfect valabilă din punct de vedere matematic.

Din punct de vedere al semnificației lor fizice se identifică următoarele criterii ce stau la alegerea parametrilor ce vor fi utilizați la modelarea circuitelor electrice prin cuadripoli:

➤ din punctul de vedere al alegerii setului de parametri ce se determină (măsoară): Datorită faptului că aceștia depind de frecvența de lucru (reamintim că se lucrează în c.a.) sunt utile următoarele observații:

Parametrii impedanță (de gol) nu se pot măsura decât la frecvențe joase. Condiția de gol se realizează corect lăsând bornele neconectate. În c.a. condiția de gol este influențată de capacitatea parazită C_p , ce are o valoare foarte mică, dintre bornele cuadripolului. La frecvențe joase, reactanța capacității parazite ($1/\omega C_p$) dintre borne fiind foarte mare, circuitul este în gol. Cu cât frecvența crește, reactanța capacității parazite scade, nemaîndeplinindu-se condiția de gol - vezi figura 3.15.

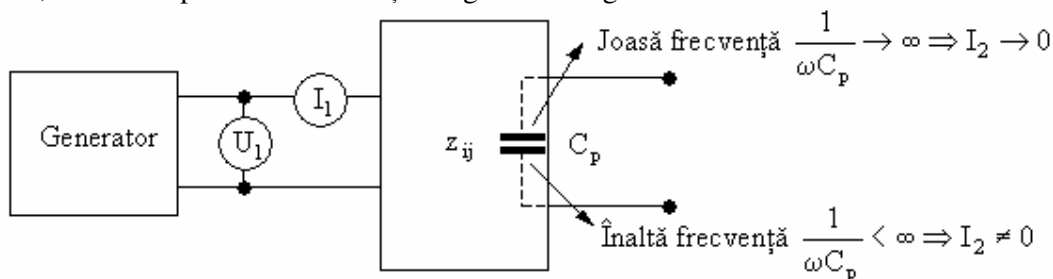


Fig. 3.15. Influența capacității parazite C_p la măsurarea parametrilor de gol

Parametrii impedanță (de scurtcircuit) se determină în c.a. prin conectarea între bornele respective a unui condensator C_{sc} , de valoare foarte mare - vezi figura 3.16.

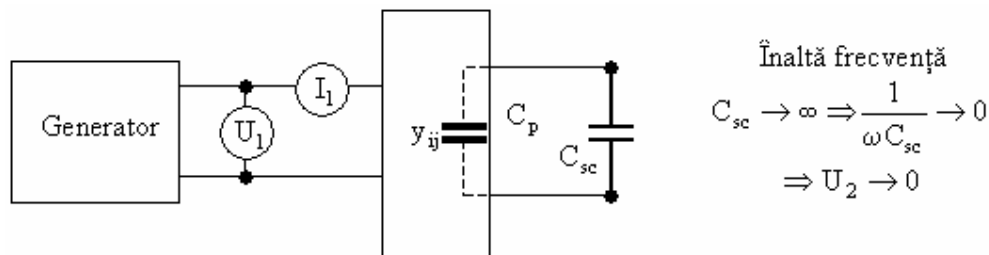


Fig. 3.16. Metoda de măsurarea în c.a. a parametrilor de gol

Folosind valori uzuale ale condensatorului [μF] îndeplinirea condiției $1/\omega C_{sc} \rightarrow 0$ are loc la frecvențe foarte mari ($f > MHz$).

➤ din punctul de vedere al simplității relațiile ce definesc parametrii de cuadripol, (ecuații ce descriu comportarea circuitului):

Un circuit complex poate fi echivalat prin mai mulți cuadripoli ce sunt interconectați între ei. În funcție de această interconectare (serie, paralel, cascadă...) este mai simplu din punct de vedere matematic să se utilizeze un set de parametri în comparație cu altul.

În concluzie la utilizarea parametrilor de cuadripol se poate urmări următorul algoritm.

- Determinarea (măsurarea) în condiții corecte (în gol sau scurtcircuit) a unui set de parametri;
- În funcție de caracterul particular al circuitului analizat se poate utiliza fie setul de parametri determinat prin măsurători, fie altul, utilizând relațiile de echivalență (vezi tabelul 3.2.1).

3.3.1. Parametrii de cuadripol ai unui atenuator serie

Se determină parametrii de cuadripol ai unui circuit format dintr-un rezistor conectat în serie între intrare și ieșire
Schema cuadripolului este prezentată în figura 3.17.

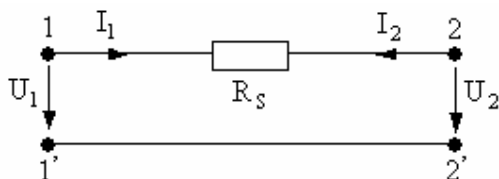


Fig. 3.17. Cuadripol format dintr-un rezistor conectat serie între intrare și ieșire

1. Parametrii impedanță

Sistemul de ecuații este următorul:

$$\begin{cases} U_1 = z_{11}I_1 + z_{12}I_2 \\ U_2 = z_{21}I_1 + z_{22}I_2 \end{cases}$$

Conform semnificației fizice a parametrilor impedanță se poate scrie:

$$z_{11} = \left. \frac{U_1}{I_1} \right|_{I_2=0}$$

Particularizând condiția de gol ($I_2 = 0$) pentru cuadripolul din figura 3.17 se observă că $I_1 = I_2 = 0$ și în consecință $z_{11} = \infty$. Această observație fiind valabilă pentru calculul tuturor parametrilor impedanță (de gol), rezultă că aceștia au o valoare infinită.

$$[Z]_s = \begin{bmatrix} \infty & \infty \\ \infty & \infty \end{bmatrix} \quad (3.66)$$

Rezultatul (3.66) este firesc, deoarece determinarea parametrilor de gol ai unui cuadripol format dintr-o rezistență serie implică anularea curentului ce o parcurge.

2. Parametrii admitanță

Datorită rezultatului obținut pentru matricea parametrilor impedanță, la calculul parametrilor admitanță nu se poate utiliza relația (vezi tabelul 3.2.1) de legătură dintre cele două seturi de parametri, deoarece toate valorile parametrilor impedanță sunt infinite.

$$[Y]_s = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{z_{22}}{\Delta z} & -\frac{z_{12}}{\Delta z} \\ -\frac{z_{21}}{\Delta z} & \frac{z_{11}}{\Delta z} \end{bmatrix}$$

În consecință metoda de determinare a parametrilor admitanță constă în definirea acestora conform (3.17)... (3.20).

Sistemul de ecuații este următorul:

$$\begin{cases} I_1 = y_{11}U_1 + y_{12}U_2 \\ I_2 = y_{21}U_1 + y_{22}U_2 \end{cases}$$

Schema utilizată la determinarea y_{11} și y_{21} este prezentată în figura 3.18.

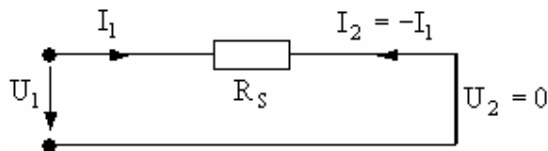


Fig. 3.18. Schema de principiu utilizată la determinarea y_{11} și y_{21} pentru cuadripolul rezistență serie

Conform semnificației fizice a parametrilor admitanță se poate scrie:

$$y_{11} = \left. \frac{I_1}{U_1} \right|_{U_2=0} = \frac{I_1}{I_1 R_S} = \frac{1}{R_S} \quad (3.67)$$

$$y_{21} = \left. \frac{I_2}{U_1} \right|_{U_2=0} = \frac{I_2}{-I_2 R_S} = -\frac{1}{R_S} \quad (3.68)$$

Schema utilizată la determinarea y_{12} și y_{22} este prezentată în figura 3.19

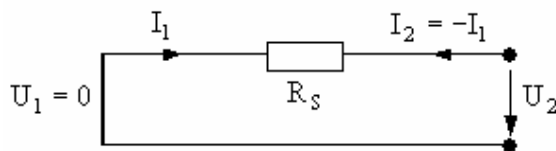


Fig. 3.19. Schema de principiu utilizată la determinarea y_{12} și y_{22} pentru cuadripolul rezistență serie

$$y_{12} = \left. \frac{I_1}{U_2} \right|_{U_1=0} = \frac{I_1}{I_2 R_S} = -\frac{1}{R_S} \quad (3.69)$$

$$y_{22} = \left. \frac{I_2}{U_2} \right|_{U_1=0} = \frac{I_2}{I_2 R_S} = \frac{1}{R_S} \quad (3.70)$$

În concluzie:

$$[Y]_S = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_S} & -\frac{1}{R_S} \\ -\frac{1}{R_S} & \frac{1}{R_S} \end{bmatrix} \quad (3.71)$$

Conform condițiilor (3.21), (3.22) se observă că acest cuadripol este atât simetric cât și reciproc.

3. Parametrii fundamentali

Conform rezultatului obținut pentru matricea parametrilor admitanță, la calculul parametrilor fundamentali se poate utiliza relația (vezi tabelul 3.2.1) de legătură dintre cele două seturi de parametri:

$$[A]_S = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{y_{22}}{y_{21}} & -\frac{1}{y_{21}} \\ -\frac{\Delta y}{y_{21}} & -\frac{y_{11}}{y_{21}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & R_S \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.72)$$

Determinarea parametrilor fundamentali se poate realiza interpretând semnificația fizică a lor, utilizând (3.31)... (3.34), particularizând pentru fiecare dintre ei schema din figura 3.17 (după același algoritm urmat la determinarea parametrilor admitanță).

4. Parametrii hibridi

Și în acest caz există două variante de calcul a acestor parametri.

- Utilizarea semnificației fizice a lor, (3.46)... (3.49);
- Utilizarea relației (vezi tabelul 3.2.1) de legătură dintre parametrii hibridi și un set de parametri determinați anterior;

Conform acestei ultime metode se obține:

$$[h]_S = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{y_{11}} & -\frac{y_{12}}{y_{11}} \\ \frac{y_{21}}{y_{11}} & \frac{\Delta y}{y_{11}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_S & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.73)$$

3.3.2. Parametrii de cuadripol ai unui atenuator paralel

Se determină parametrii de cuadripol ai unui circuit format dintr-un rezistor conectat paralel între intrare și ieșire

Schema cuadripolului este prezentată în figura 3.20.

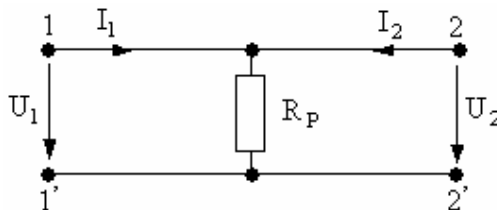


Fig. 3.20. Cuadripol format dintr-un rezistor conectat paralel între intrare și ieșire

1. Parametrii impedanță

Sistemul de ecuații este următorul:

$$\begin{cases} U_1 = z_{11}I_1 + z_{12}I_2 \\ U_2 = z_{21}I_1 + z_{22}I_2 \end{cases}$$

Schema utilizată la determinarea z_{11} și z_{21} este prezentată în figura 3.21.

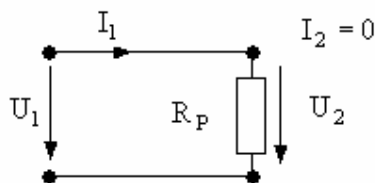


Fig. 3.21. Schema de principiu utilizată la determinarea Z_{11} și Z_{21} pentru cuadripolul rezistență paralel

Conform semnificației fizice a parametrilor admitanță se poate scrie:

$$z_{11} = \left. \frac{U_1}{I_1} \right|_{I_2=0} = R_P \quad (3.74)$$

$$z_{21} = \left. \frac{U_2}{I_1} \right|_{I_2=0} = \left. \frac{U_1}{I_1} \right|_{I_2=0} = R_P \quad (3.75)$$

Schema utilizată la determinarea z_{12} și z_{22} este prezentată în figura 3.22.

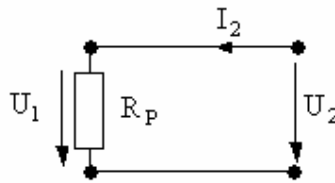


Fig. 3.22. Schema de principiu utilizată la determinarea z_{12} și z_{22} pentru cuadripolul rezistență paralel

Conform semnificației fizice a parametrilor admitanță se poate scrie:

$$z_{12} = \left. \frac{U_1}{I_2} \right|_{I_1=0} = R_P \quad (3.76)$$

$$z_{22} = \left. \frac{U_2}{I_2} \right|_{I_1=0} = R_P \quad (3.77)$$

În concluzie:

$$[Z]_P = \begin{bmatrix} R_P & R_P \\ R_P & R_P \end{bmatrix} \quad (3.78)$$

Conform condițiilor (3.1), (3.12) se observă că acest cuadripol este atât simetric cât și reciproc.

2. Parametrii admitanță

Conform rezultatului obținut pentru matricea parametrilor admitanță, la calculul parametrilor fundamentali se poate utiliza relația (vezi tabelul 3.2.1) de legătură dintre cele două seturi de parametri:

$$[Y]_P = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{z_{22}}{\Delta z} & -\frac{z_{12}}{\Delta z} \\ -\frac{z_{21}}{\Delta z} & \frac{z_{11}}{\Delta z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \infty & \infty \\ \infty & \infty \end{bmatrix} \quad (3.79)$$

Se observă că toate valorile parametrilor impedanță, pentru cazul rezistenței legată paralel, sunt infinite. Matematic acest rezultat este consecința faptului că $\Delta z = 0$.

La aceeași concluzie se poate ajunge calculând parametrii admitanță conform semnificației fizice a acestora.

Sistemul de ecuații este următorul:

$$\begin{cases} I_1 = y_{11}U_1 + y_{12}U_2 \\ I_2 = y_{21}U_1 + y_{22}U_2 \end{cases}$$

Particularizând condiția de scurtcircuit (fie la intrare, fie la ieșire) pentru cuadripolul din figura 3.20 se observă că $U_1 = U_2 = 0$ și în consecință $y_{ij} = \infty$.

3. Parametrii fundamentali

La calculul parametrilor fundamentali se poate utiliza relația (vezi tabelul 3.2.1) de legătură cu parametrii impedanță, determinați anterior:

$$[A]_P = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{z_{11}}{z_{21}} & \frac{\Delta z}{z_{21}} \\ 1 & \frac{z_{22}}{z_{21}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{R_P} & 1 \end{bmatrix} \quad (3.80)$$

Astfel, determinarea parametrilor fundamentali se poate realiza interpretând semnificația fizică a lor, utilizând (3.31)... (3.34), particularizând pentru fiecare dintre ei schema din figura 3.20 (după același algoritm urmat la determinarea parametrilor impedanță).

4. Parametrii hibridi

Și în acest caz există două variante de calcul a acestor parametrii.

- Utilizarea semnificației fizice a lor, (3.46)... (3.49);
- Utilizarea relației (vezi tabelul 3.2.1) de legătură dintre parametrii hibridi și un set de parametrii determinați anterior.

Conform acestei ultime metode se obține:

$$[h]_P = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\Delta z}{z_{22}} & \frac{z_{12}}{z_{22}} \\ -\frac{z_{21}}{z_{22}} & \frac{1}{z_{22}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \frac{1}{R_P} \end{bmatrix} \quad (3.81)$$

3.3.3. Parametrii de cuadripol ai unui atenuator ai unui atenuator nesimetric în T

Schema atenuatorului este prezentată în figura 3.23

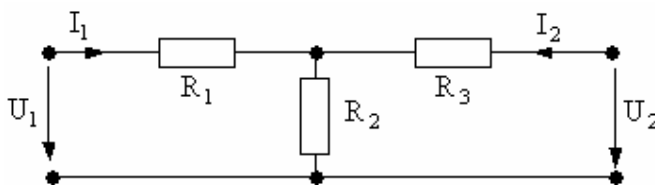


Fig. 3.23. Atenuator nesimetric în T

Se va prezenta modalitatea de determinare doar a parametrilor fundamentali. Celelalte seturi de parametrii se pot determina cu ușurință, utilizând relațiile de legătură cu parametrii fundamentali (vezi tabelul 3.2.1).

Sistemul de ecuații este următorul:

$$\begin{cases} U_1 = A_{11}U_2 - A_{12}I_2 \\ I_1 = A_{21}U_2 - A_{22}I_2 \end{cases}$$

Schema utilizată la determinarea A_{11} și A_{21} este prezentată în figura 3.24.

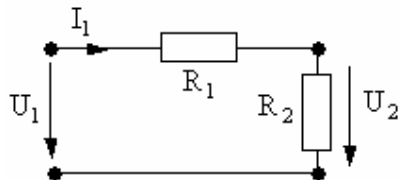


Fig. 3.24. Schema de principiu utilizată la determinarea A_{11} și A_{21} în cazul atenuatorului nesimetric în T

Conform semnificației fizice a parametrilor fundamentali se poate scrie:

$$A_{11} = \left. \frac{U_1}{U_2} \right|_{I_2=0} = \frac{(R_1 + R_2)I_1}{R_2 I_1} = \frac{R_1 + R_2}{R_2} = 1 + \frac{R_1}{R_2} \quad (3.82)$$

$$A_{21} = \left. \frac{I_1}{U_2} \right|_{I_2=0} = \frac{I_1}{I_1 R_2} = \frac{1}{R_2} \quad (3.83)$$

Conform semnificației fizice a parametrilor fundamentali se poate scrie:

$$A_{12} = - \left. \frac{U_1}{I_2} \right|_{U_2=0} = R_1 + \frac{R_1 R_3}{R_2} + R_3 \quad (3.84)$$

$$A_{22} = - \left. \frac{I_1}{I_2} \right|_{U_2=0} = 1 + \frac{R_1}{R_2} \quad (3.85)$$

Schema utilizată la determinarea A_{12} și A_{22} este prezentată în figura 3.25.

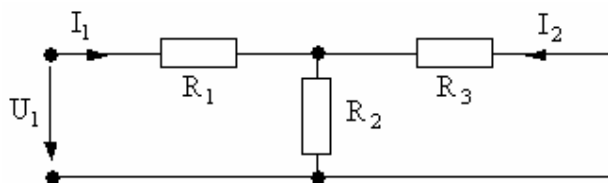


Fig. 3.25. Schema de principiu utilizată la determinarea A_{12} și A_{22} în cazul atenuatorului nesimetric în T

În concluzie, matricea parametrilor fundamentali are expresia:

$$[A]_T = \begin{bmatrix} 1 + \frac{R_1}{R_2} & R_1 + \frac{R_1 R_3}{R_2} + R_3 \\ \frac{1}{R_2} & 1 + \frac{R_3}{R_2} \end{bmatrix} \quad (3.86)$$

3.3.4. Parametrii de cuadripol ai unui tranzistor bipolar

Tranzistorul bipolar poate fi echivalat printr-un circuit “natural” ale cărui elemente sunt determinate prin calcul, în urma modelării fenomenelor fizice ce au loc în dispozitiv (difuzia purtătorilor minoritari, efectul modulării grosimii bazei...). Datorită dependenței unui astfel de circuit “natural” de precizia modelării fenomenelor fizice, nu este recomandabil ca elementele circuitului echivalent să se determine prin calcul. O alternativă pentru construirea unui asemenea circuit echivalent o constituie determinarea parametrilor acestui circuit prin măsurători electrice la bornele (terminalele) circuitului. În concluzie un tranzistor bipolar poate fi echivalat printr-un cuadripol.

Observație:

➤ Circuitul echivalent este necesar deoarece pe el se pot aplica legile circuitelor electrice (Ohm, Kirchhoff...), fiind compus din elemente pasive (rezistoare, condensatoare, bobine) sau din surse de tensiune/curent.

Asupra circuitelor de cuadripol asociate unui tranzistor bipolar se pot face următoarele observații:

➤ Toți parametri sunt definiți și mășurați în condiții de semnal mic (variații mici ale mărimilor de interes: $v_{be}, v_{ce}, i_b, i_c \dots$);

➤ Datorită faptului că acești parametri depind de (se pot măsura corect la) frecvența de lucru rezultă că:

- parametrii impedanță (de gol) caracterizează tranzistorul la frecvențe joase;
- parametrii admitanță (de scurtcircuit) caracterizează tranzistorul la frecvențe înalte;

➤ Setul de parametri cel mai des utilizat la modelarea tranzistorului este setul de parametri hibridi;

➤ Deoarece tranzistorul are trei borne, una din ele va fi comună atât intrării cât și ieșirii cuadripolului. Circuitul astfel obținut va purta numele terminalului comun intrării și ieșirii, astfel:

- emitor comun EC (emitorul comun intrării și ieșirii);
- bază comună BC (baza comună intrării și ieșirii);
- colector comun CC (colectorul comun intrării și ieșirii);

În continuare se prezintă scheme prin care un tranzistor bipolar este echivalat cu cuadripoli.

3.3.4.1. Parametrii impedanță ai unui tranzistor bipolar.

Parametrii impedanță ai tranzistorului se determină (măsoară) la frecvențe joase.

Se prezintă schema de cuadripol corespunzătoare tranzistorului bipolar de tip npn în conexiunea E.C.

Conexiunea în EC a tranzistorului este prezentată în figura 2.26

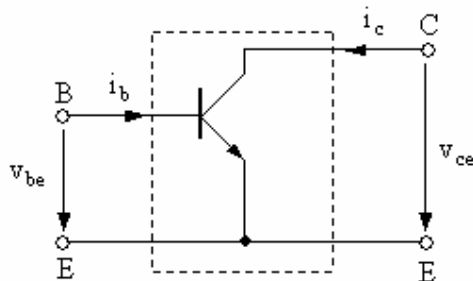


Fig. 3.26. Tranzistor bipolar **nnp** în conexiunea **E.C.**

Relația (3.3) definește cuadripolul din punctul de vedere al parametrilor impedanță. Prin identificarea celor patru mărimi (două de la intrare U_1, I_1 și două de la ieșire U_2, I_2) ale cuadripolului cu semnalele ce caracterizează TB în conexiunea EC, rezultă că:

$$U_1 \equiv v_{be}, I_1 \equiv i_b, U_2 \equiv v_{ce}, I_2 \equiv i_c \quad (3.87)$$

Conform (3.87), relația (3.3) dintre tensiuni și curenți ce caracterizează cuadripolul din punctul de vedere al parametrilor impedanță este următoarea:

$$\begin{cases} v_{be} = Z_{11}i_b + Z_{12}i_c \\ v_{ce} = Z_{21}i_b + Z_{22}i_c \end{cases} \quad (3.88)$$

Conform (3.88) schema echivalentă descrisă de parametrii impedanță, a TB de tip npn este prezentată în figura 3.27.

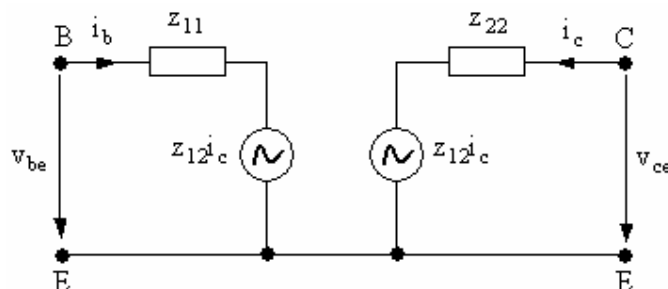


Fig. 3.27. Schema echivalentă impedanță a unui TB de tip npn

3.3.4.2. Parametrii admitanță ai unui tranzistor bipolar.

Parametrii admitanță ai tranzistorului se determină (măsoară) la frecvențe înalte. Relația (3.13) dintre curenți și tensiuni ce caracterizează cuadripolul din punctul de vedere al parametrilor admitanță, aplicată tranzistorului în conexiunea EC, este următoarea:

$$\begin{cases} i_b = y_{11}v_{be} + y_{12}v_{ce} \\ i_c = y_{21}v_{be} + y_{22}v_{ce} \end{cases} \quad (3.89)$$

Conform (3.89) schema echivalentă descrisă de parametrii impedanță, a TB de tip npn în conexiunea EC este prezentată în figura 3.28.

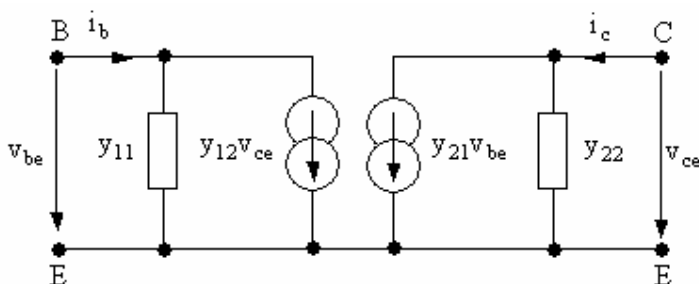


Fig. 3.28. Schema echivalentă admitanță a unui TB de tip npn

Întrucât toți parametrii y sunt măsurați în condiții de scurtcircuit ei sunt indicați pentru a descrie tranzistorul la frecvențe înalte. Concret, parametrii y pot fi folosiți pentru studiul unui amplificator de bandă îngustă funcționând la frecvențe înalte.

Dezavantajele utilizării unui asemenea set de parametri constă în faptul că fiecare parametru este un număr complex (prezentat prin partea lui reală și imaginară, fie prin modul și fază) care depinde de punctul static de funcționare și de temperatură.

Prin utilizarea unor asemenea parametri există riscul ca proiectantul care este silit să manipuleze un volum mare de date să piardă contactul intuitiv cu problema pe care o tratează.

3.3.4.3. Parametrii hibridi ai unui tranzistor bipolar.

Relația (3.43) ce caracterizează cuadripolul din punctul de vedere al parametrilor hibridi, aplicată tranzistorului în conexiunea EC, este următoarea:

$$\begin{cases} v_{be} = h_{11}i_b + h_{12}v_{ce} \\ i_c = h_{21}i_b + h_{22}v_{ce} \end{cases} \quad (3.90)$$

Conform (3.90) schema echivalentă descrisă de parametrii impedanță, a TB de tip npn în conexiunea EC este prezentată în figura 3.29.

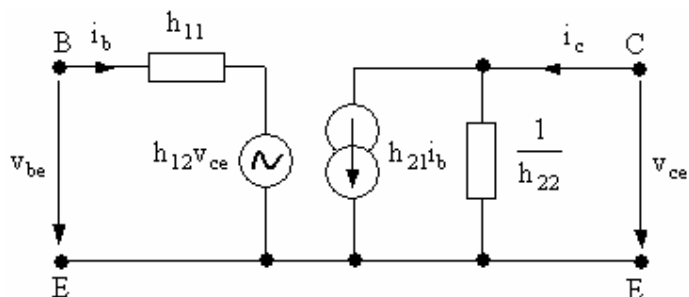


Fig. 3.29. Schema echivalentă hibridă a unui TB de tip npn în conexiunea EC

De regulă parametrii h se măsoară și se utilizează la frecvențe joase și ca urmare sunt numere reale. Ei au dimensiuni fizice diferite, de unde și denumirea lor (hibridi).

Avantajul principal al descrierii tranzistorului cu parametrii h îl constituie faptul că aceștia se măsoară comod, fiind precizați în cataloage. Din punct de vedere numeric, domeniile uzuale pentru parametrii h ai unui tranzistor de joasă frecvență sunt următoarele:

$$h_{11} [\text{sute } \Omega \dots \text{k}\Omega]; h_{12} [10^{-4} \dots 10^{-3}]; h_{21} [\text{zeci} \dots \text{sute}]; h_{22} [\text{zeci } \mu\text{S}] \quad (3.91)$$

Aceștia nu se pot măsura (utiliza) decât la joasă frecvență, din următorul motiv:

➤ Doi din acești parametri (h_{12} , h_{22}) se măsoară în condiții de gol la intrare $i_b = 0$; această condiție se realizează corect la frecvențe joase, lăsând bornele respective neconectate; la frecvențe înalte intervine reactanța capacității parazite dintre borne (vezi figura 3.15), care alterează condiția de gol.

Modelarea cu parametrii hibridi se aplică tranzistorului în orice conexiune. În figurile 3.30 și 3.31 se prezintă schemele echivalente hibride ale tranzistorului în conexiunile BC, respectiv CC.

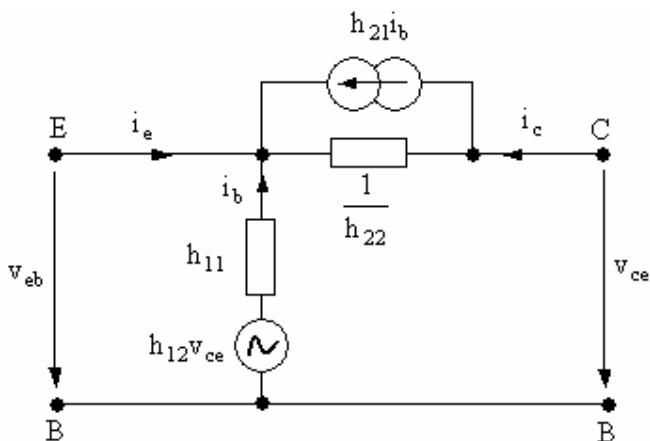


Fig. 3.30. Schema echivalentă hibridă a unui TB de tip npn în conexiunea BC

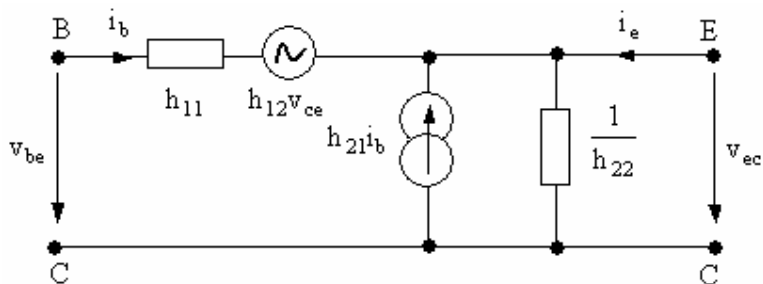


Fig. 3.31. Schema echivalentă hibridă a unui TB de tip npn în conexiunea CC

Parametrii hibrizi și-au câștigat popularitatea datorită legăturii simple cu parametrii circuitului “natural”.

Echivalența dintre parametrii hibrizi și cei naturali se face pe baza:

➤ Schemei hibride a tranzistorului aflat în conexiunea EC (cea mai des întâlnită)- vezi figura 3.29.

➤ Schema circuitului echivalent Giacoletto (la frecvențe joase) al tranzistorului aflat în conexiunea EC- vezi figura 3.32.

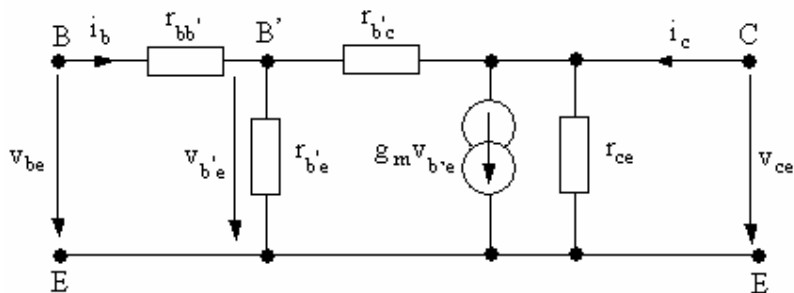


Fig. 3.32 Circuitul echivalent Giacoletto (simplificat) al unui tranzistor bipolar la frecvențe joase

Aplicând sistemul de ecuații cu parametrii hibrizi (3.90) asupra schemei din figura 3.32 rezultă că:

$$h_{11e} = \left. \frac{V_{be}}{i_b} \right|_{V_{ce}=0} = \frac{i_b r'_{bb'} + i_b (r'_{be} \parallel r'_{bc})}{i_b} = r'_{bb'} + \frac{r'_{be} r'_{bc}}{r'_{be} + r'_{bc}} \approx r'_{bb'} + r'_{be} \quad (3.92)$$

$$h_{12e} = \left. \frac{V_{be}}{V_{ce}} \right|_{i_b=0} = \frac{V_{b'e}}{V_{ce}} = \frac{r'_{be}}{r'_{be} + r'_{bc}} = \frac{r'_{be}}{r'_{bc}} \quad (3.93)$$

$$h_{21e} = \left. \frac{i_c}{i_b} \right|_{V_{ce}=0} = \frac{g_m V_{b'e}}{i_b} \approx \frac{g_m i_b r'_{be}}{i_b} = g_m r'_{be} \quad (3.94)$$

$$\begin{aligned}
 h_{22_e} &= \left. \frac{i_c}{v_{ce}} \right|_{i_b=0} = \frac{\frac{v_{ce}}{r_{ce}} + \frac{v_{ce}}{r_{b'c} + r_{b'e}} + g_m v_{b'e}}{v_{ce}} = \frac{1}{r_{ce}} + \frac{1}{r_{b'c} + r_{b'e}} + g_m \frac{v_{b'e}}{v_{ce}} \\
 &= \frac{1}{r_{ce}} + \frac{1}{r_{b'c} + r_{b'e}} + g_m \frac{v_{ce} \frac{r_{b'e}}{r_{b'c} + r_{b'e}}}{v_{ce}} = \frac{1}{r_{ce}} + \frac{1 + g_m r_{b'e}}{r_{b'c} + r_{b'e}}
 \end{aligned} \tag{3.95}$$

Reamintim că circuitul natural Giacoleto modelează funcționarea tranzistorului, astfel:

- joncțiunea emitor-bază, care este direct polarizată, este echivalată prin:
 - $r_{b'e} \approx \text{sute } \Omega$
 - $C_{b'e} \approx \text{sute pF}$ (capacitate de difuzie), plasată în paralel cu $r_{b'e}$
- fenomenul de transport al purtătorilor prin bază este modelat prin:
 - $g_m v_{b'e}$ generator de curent
 - $r_{ce} \approx \text{zeci de k}\Omega$ (corespunde difuziei purtătorilor de la emitor spre colector)
- joncțiunea colector-bază, care este invers polarizată, este echivalată prin:
 - $r_{b'c} \approx 1\text{M}\Omega$
 - $C_{b'c} \approx \text{pF}$ (capacitate de bariaeră), plasată în paralel cu $r_{b'c}$
- rezistența extrinsecă a bazei este echivalată prin:
 - $r_{bb'} \approx 100\Omega$

Observații:

Datorită faptului că modelul tranzistorului este prezentat la frecvențe joase, în circuitul echivalent din figura 3.32 nu sunt incluse:

- $C_{b'e}$ și $C_{b'c}$ deoarece reactanțele celor două condensatoare au valori mari, ele neinfluențând circuitul echivalent;
- Capacitățile parazite dintre terminale (exterioare capsulei tranzistorului), care având valori de ordinul a 1–4 pF intervin în calcul doar la frecvențe foarte înalte;

Conform acestor observații expresiile de echivalență dintre parametrii hibridi și cei naturali devin:

$$h_{11_e} \approx r_{b'e}; h_{12_e} \approx 0; h_{21_e} \approx g_m r_{b'e}; h_{22_e} \approx \infty \tag{3.96}$$

Conform (3.96) schema echivalentă hibridă simplificată a TB în conexiunea EC este prezentată în figura 3.33.

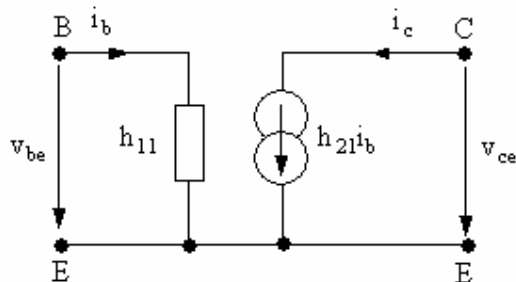


Fig. 3.33. Schema echivalentă hibridă simplificată a unui TB de tip npn în conexiunea EC

3.4. Utilizarea parametrilor matriceali la interconectarea diporților

Diporții sunt interconectați în sisteme prin legături între porți, care pot să fie de tip serie, paralel, cascadă sau mixt. Dacă parametrii de cuadripol ai lui D , D' ... sunt cunoscuți, diportul echivalent D obținut prin interconectare poate fi definit în funcție de acestia.

3.4.1. Legarea în serie a diporților

Legarea în serie a doi diporți este prezentată în figura 3.34.

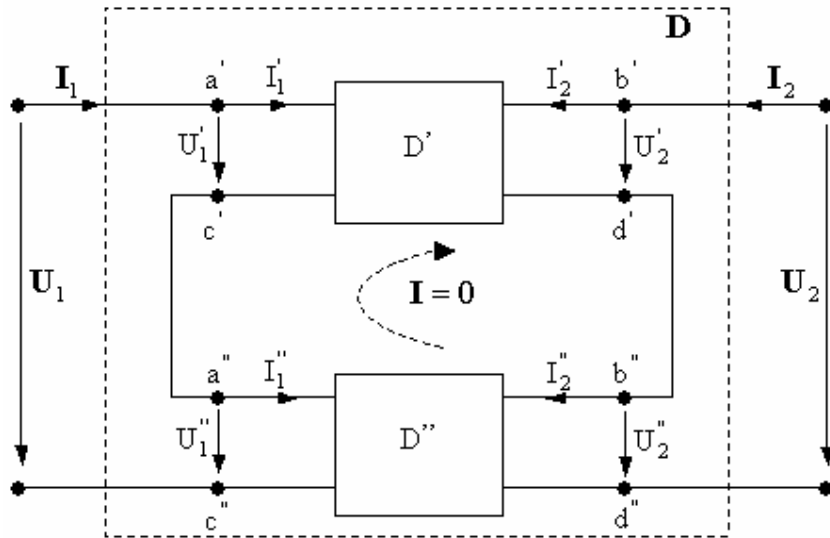


Fig. 3.34. Interconectarea diporților în serie

La interconectarea serie a diporților, parametrii diportului echivalent D pot fi *cel mai simplu* obținuți utilizând parametrii impedanță ai diporților constituenți.

Examinând legarea în serie a doi diporți, vezi figura 3.34, se constată că definatoriu pentru această conectare este următorul fapt:

Curenții de intrare/ieșire din cei doi diporți D' , D'' sunt egali între ei, fiind de asemenea egali cu curenții de intrare/ieșire corespunzător diportului echivalent D .

Din punct de vedere matematic aceste relații, scrise la ambele porți au expresiile:

$$\begin{cases} I_1' = I_1'' = I_1 \\ I_2' = I_2'' = I_2 \end{cases} \quad (3.97)$$

Expresia (3.97) este echivalentă cu faptul că între cei doi diporți nu apare o circulație de curent, adică $I = 0$ (calea de curent indicată punctat în figura 3.34). Această condiție este îndeplinită dacă:

$$U_{c'd'} = U_{a''b''} \quad (\text{cu notațiile de pe figura 3.34}) \quad (3.98)$$

Uneori această condiție de tensiuni poate fi verificată mai comod decât $I = 0$.

Teoremă

➤ Matricea parametrilor impedanță a diportului obținut prin **interconectarea în serie** a n diporți este **suma parametrilor impedanță ai diporților componenți**.

Teorema se va demonstra pentru conectarea în serie a doi diporți, generalizarea fiind banală.

La porțile de intrare/ieșire a diportului echivalent se poate scrie, conform teoremei lui Kirchhoff de tensiuni că:

$$\begin{cases} U_1 = U'_1 + U''_1 \\ U_2 = U'_2 + U''_2 \end{cases} \quad (3.99)$$

Se notează cu \mathbf{Z}' și \mathbf{Z}'' matricele impedanță pentru diporții D' și D'' . Conform (3.6) ecuațiile matriceale ale parametrilor de gol sunt:

$$\begin{cases} \mathbf{U}' = \mathbf{Z}' \mathbf{I}' \\ \mathbf{U}'' = \mathbf{Z}'' \mathbf{I}'' \end{cases} \quad (3.100)$$

Scrierea matriceală a relațiilor (3.97) și (3.99) conduce la expresiile:

$$\begin{cases} \mathbf{I} = \mathbf{I}' = \mathbf{I}'' \\ \mathbf{U} = \mathbf{U}' + \mathbf{U}'' \end{cases} \quad (3.101)$$

Aplicând (3.100) în (3.101) rezultă că:

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}' + \mathbf{U}'' = \mathbf{Z}' \mathbf{I}' + \mathbf{Z}'' \mathbf{I}'' = \mathbf{Z}' \mathbf{I} + \mathbf{Z}'' \mathbf{I} = (\mathbf{Z}' + \mathbf{Z}'') \mathbf{I} = \mathbf{Z}_S \mathbf{I}$$

unde \mathbf{Z}_S este matricea impedanță a diportului echivalent. În concluzie se poate scrie că:

$$\mathbf{Z}_S = \mathbf{Z}' + \mathbf{Z}'' \quad (3.102)$$

Exemplu

Se dă perechea de diporți în T din figura 3.35. Să se conecteze în serie cei doi diporți.

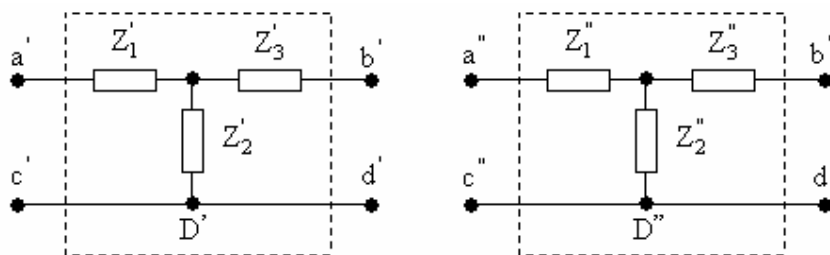


Fig. 3.35. Diporți în T, exprimați prin impedanțe

La o primă vedere există două modalități de legare în serie a celor doi diporți, prezentată în figura 3.36.

Posibilitatea de legare în serie a doi diporți este confirmată de îndeplinirea condiției (3.98). Inspectând diporții din figura 3.35 se observă că: $U_{c'd'} = U_{c''d''} = 0$ și că în cel mai general caz $U_{a'b'} \neq U_{a''b''} \neq 0$. În consecință legarea corectă în serie a celor doi diporți este cea prezentată în figura 3.36b). În acest caz matricea impedanță a diportului echivalent este egală cu suma matricelor impedanță a celor doi diporți (conform 3.102).

Pentru a calcula matricele impedanță a celor doi diporți se folosesc rezultatele obținute la calculul matricelor fundamentale pentru aceeași diporți.

Conform (3.86)

$$[\mathbf{A}]_T = \begin{bmatrix} 1 + \frac{Z_1}{Z_2} & Z_1 + \frac{Z_1 Z_3}{Z_2} + Z_3 \\ \frac{1}{Z_2} & 1 + \frac{Z_3}{Z_2} \end{bmatrix}$$

Utilizând relația (vezi tabelul 3.2.1) de legătură dintre parametrii impedanță și parametrii fundamentali, rezultă că:

$$[Z]_T = \begin{bmatrix} \frac{A_{11}}{A_{21}} & \frac{\Delta A}{A_{21}} \\ 1 & \frac{A_{22}}{A_{21}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_1 + Z_2 & Z_2 \\ Z_2 & Z_2 + Z_3 \end{bmatrix} \quad (3.103)$$

Aplicând (3.102), $Z_S = Z' + Z''$ rezultă că:

$$[Z]_{(T',T'')\text{SERIE}} = \begin{bmatrix} Z'_1 + Z'_2 + Z''_1 + Z''_2 & Z'_2 + Z''_2 \\ Z'_2 + Z''_2 & Z'_2 + Z'_3 + Z''_2 + Z''_3 \end{bmatrix} \quad (3.104)$$

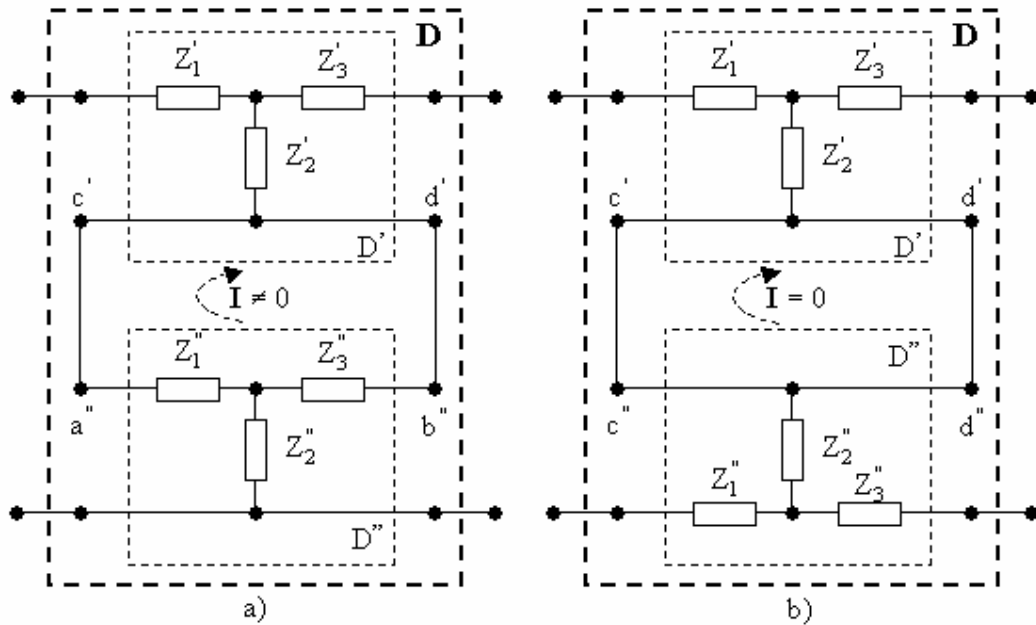


Fig. 3.36 a) Legarea greșită în serie a doi diporți în T; b) Legarea corectă în serie a doi diporți în T

3.4.2. Legarea în paralel a diporților

Legarea în paralel a doi diporți este prezentată în figura 3.37.

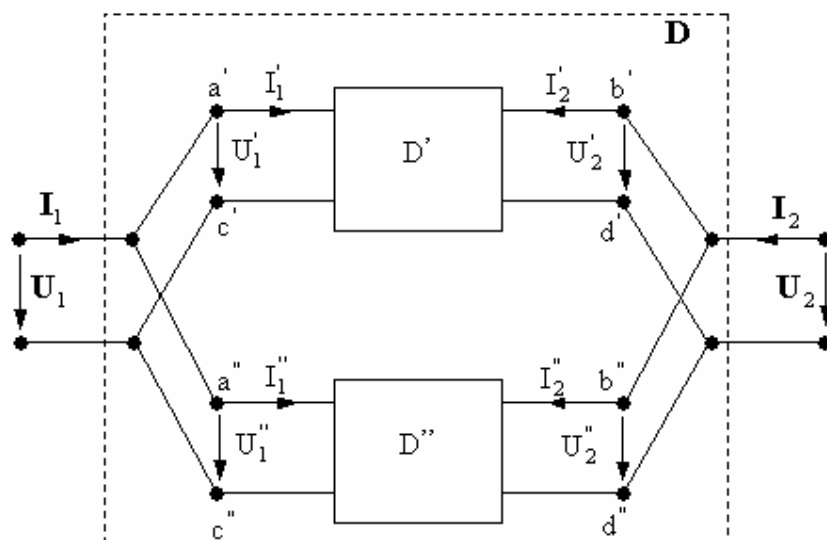


Fig. 3.37. Interconectarea diporților în paralel

La interconectarea serie a diporților, parametrii diportului echivalent \mathbf{D} pot fi *cel mai simplu* obținuți utilizând parametrii admitanță ai diporților constituenți.

Examinând legarea în paralel a doi diporți, vezi figura 3.37, se constată că definitoriu pentru această conectare este faptul că:

Tensiunile de intrare/ieșire a celor doi diporți D' , D'' sunt egale între ele, fiind de asemenea egale cu tensiunea de intrare/ieșire corespunzătoare diportului echivalent \mathbf{D} . Această caracteristică a conectării în paralel a diporților este determinată de faptul că legarea în paralel este duală conexiunii serie. Din punct de vedere matematic aceste relații, scrise la ambele porți au expresiile:

$$\begin{cases} U_1' = U_1'' = U_1 \\ U_2' = U_2'' = U_2 \end{cases} \quad (3.105)$$

Expresia (3.105) este echivalentă cu:

$$U_{c'd'} = U_{c''d''} \quad (\text{cu notațiile de pe figura 3.37}) \quad (3.106)$$

Teoremă

➤ Matricea parametrilor admitanță a diportului obținut prin **interconectarea în paralel** a n diporți este **suma parametrilor admitanță ai diporților componenți**.

Teorema se va demonstra pentru conectarea în serie a doi diporți, generalizarea fiind banală.

La nodurile de intrare/ieșire a diportului echivalent se poate scrie, conform teoremei lui Kirchhoff de curent că:

$$\begin{cases} I_1 = I_1' + I_1'' \\ I_2 = I_2' + I_2'' \end{cases} \quad (3.107)$$

Se notează cu \mathbf{Y}' și \mathbf{Y}'' matricele impedanță pentru diporții D' și D'' .

Conform (3.16) ecuațiile matriceale ale parametrilor de scurtcircuit sunt:

$$\begin{cases} \mathbf{I}' = \mathbf{Y}'\mathbf{U}' \\ \mathbf{I}'' = \mathbf{Y}''\mathbf{U}'' \end{cases} \quad (3.108)$$

Scrierea matriceală a relațiilor (3.105) și (3.107) conduce la expresiile:

$$\begin{cases} \mathbf{I} = \mathbf{I}' + \mathbf{I}'' \\ \mathbf{U} = \mathbf{U}' = \mathbf{U}'' \end{cases} \quad (3.109)$$

Aplicând (3.108 în (3.109) rezultă că:

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}' + \mathbf{I}'' = \mathbf{Y}'\mathbf{U}' + \mathbf{Y}''\mathbf{U}'' = \mathbf{Y}'\mathbf{U} + \mathbf{Y}''\mathbf{U} = (\mathbf{Y}' + \mathbf{Y}'')\mathbf{U} = \mathbf{Y}_P \mathbf{U}$$

unde \mathbf{Y}_P este matricea admitanță a diportului echivalent. În concluzie se poate scrie că:

$$\mathbf{Y}_P = \mathbf{Y}' + \mathbf{Y}'' \quad (3.110)$$

Exemplu

Se dă perechea de diporți în T din figura 3.35. Să se conecteze în paralel cei doi diporți.

Inițial se calculează matricile admitanță a celor doi diporți. Pentru aceasta se folosesc rezultatele obținute la calculul matricelor fundamentale pentru aceeași diporți.

Conform (3.86)

$$[\mathbf{A}]_T = \begin{bmatrix} 1 + \frac{Z_1}{Z_2} & Z_1 + \frac{Z_1 Z_3}{Z_2} + Z_3 \\ \frac{1}{Z_2} & 1 + \frac{Z_3}{Z_2} \end{bmatrix}$$

Utilizând relația (vezi tabelul 3.2.1) de legătură dintre parametrii admitanță și parametrii fundamentali, rezultă că:

$$[\mathbf{Y}]_T = \begin{bmatrix} \frac{A_{22}}{A_{12}} & -\frac{\Delta A}{A_{12}} \\ -\frac{1}{A_{12}} & \frac{A_{11}}{A_{12}} \end{bmatrix} = \frac{1}{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3} \begin{bmatrix} Z_2 + Z_3 & -Z_2 \\ -Z_2 & Z_1 + Z_2 \end{bmatrix} \quad (3.111)$$

Deoarece se procedează la legarea în paralel a celor doi diporți, uzual este ca și aceștia să fie definiți prin intermediul unor admitanțe, conform următoarei echivalări:

$$Y_1 = \frac{1}{Z_1}; Y_2 = \frac{1}{Z_2}; Y_3 = \frac{1}{Z_3} \quad (3.112)$$

Conform acestei dualități

➤ expresia matricei parametrilor admitanță devine prin aplicarea (3.112) în (3.111):

$$[\mathbf{Y}]_T = \begin{bmatrix} \frac{A_{22}}{A_{12}} & -\frac{\Delta A}{A_{12}} \\ -\frac{1}{A_{12}} & \frac{A_{11}}{A_{12}} \end{bmatrix} = \frac{1}{Y_1 + Y_2 + Y_3} \begin{bmatrix} Y_1(Y_2 + Y_3) & -Y_1 Y_3 \\ -Y_1 Y_3 & Y_3(Y_1 + Y_2) \end{bmatrix} \quad (3.113)$$

➤ schema diportului în T construită cu admitanțe este prezentată în figura 3.38.

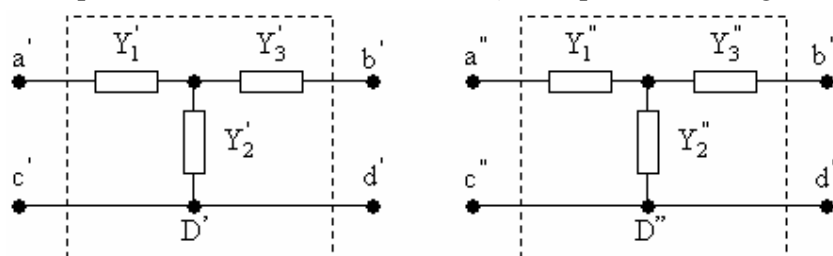


Fig. 3.38. Diporturi în T, exprimați prin admitanțe

La o primă vedere există două modalități de legare în paralel a celor doi diporturi, prezentată în figura 3.39.

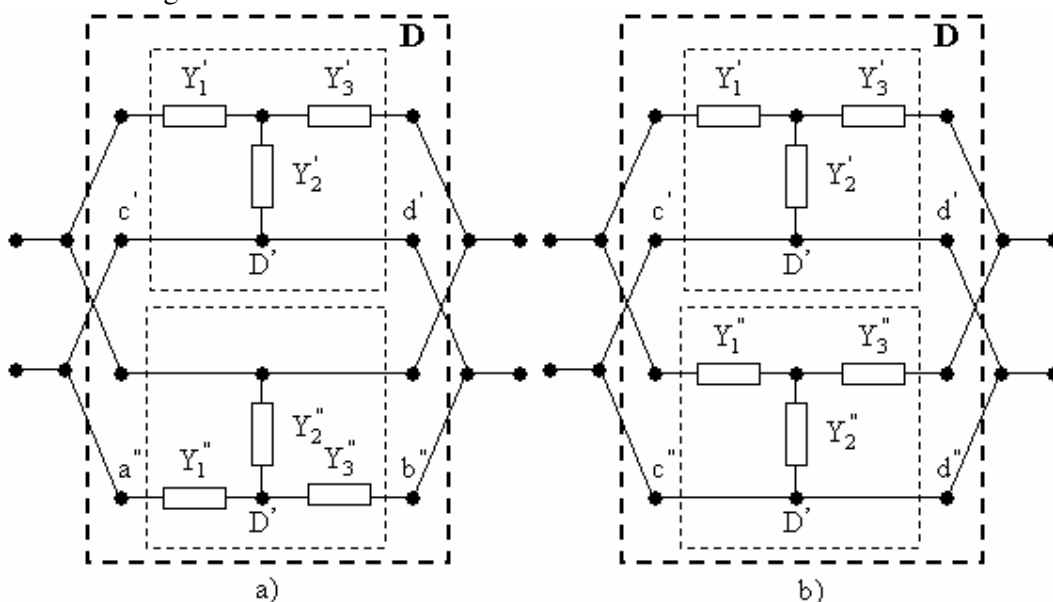


Fig. 3.39 a) Legarea greșită în paralel a doi diporturi în T; b) Legarea corectă în paralel a doi diporturi în T

Posibilitatea de legare în serie a doi diporturi este confirmată de îndeplinirea condiției (3.106). Inspectând diportii din figura 3.38 se observă că: $U_{c'd'} = U_{c''d''} = 0$ și că în cel mai general caz $U_{c'd'} \neq U_{a''b''} \neq 0$. În consecință legarea corectă în paralel a celor doi diporturi este cea prezentată în figura 3.39b). În acest caz matricea admitanță a diportului echivalent este egală cu suma matricelor admitanță a celor doi diporturi - conform (3.110).

Aplicând (3.110), $\mathbf{Y}_P = \mathbf{Y}' + \mathbf{Y}''$ rezultă că:

$$[\mathbf{Y}]_{(T',T'')\text{PARALEL}} = \begin{bmatrix} \frac{Y_1(Y_2' + Y_3')}{\sum Y'} + \frac{Y_1''(Y_2'' + Y_3'')}{\sum Y''} & -\left(\frac{Y_1' Y_3'}{\sum Y'} + \frac{Y_1'' Y_3''}{\sum Y''}\right) \\ -\left(\frac{Y_1' Y_3'}{\sum Y'} + \frac{Y_1'' Y_3''}{\sum Y''}\right) & \frac{Y_3'(Y_1' + Y_2')}{\sum Y'} + \frac{Y_3''(Y_1'' + Y_2'')}{\sum Y''} \end{bmatrix} \quad (3.114)$$

unde s-a utilizat notația:

$$\sum Y' = Y_1' + Y_2' + Y_3'; \sum Y'' = Y_1'' + Y_2'' + Y_3''$$

3.4.3. Legarea în serie-parallel a diporților

Legarea în serie-parallel a doi diporți este prezentată în figura 3.40.

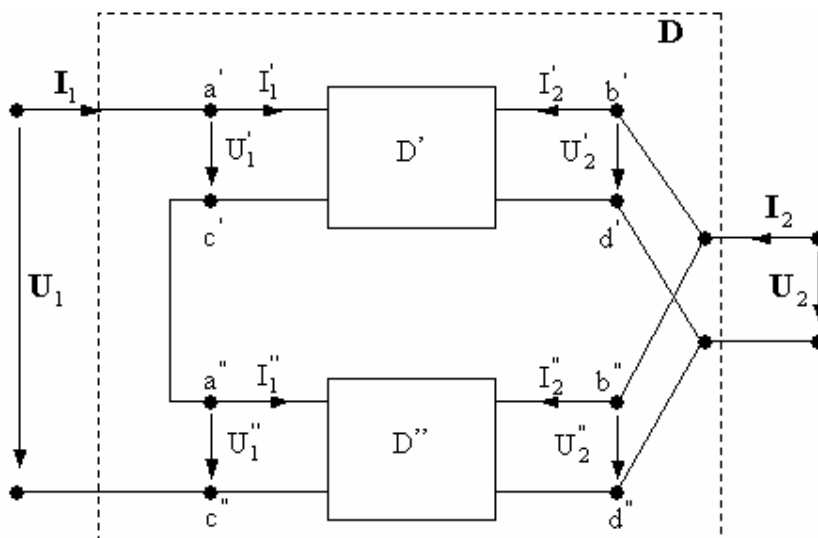


Fig. 3.40. Interconectarea diporților în serie-parallel

Legarea în serie-parallel este mai puțin frecventă în practică, totuși este utilizată de exemplu în sistemele telefonice multiplex la conectarea în paralel a căilor spre linie.

La interconectarea serie-parallel a diporților, parametrii diportului echivalent \mathbf{D} pot fi *cel mai simplu* obținuți utilizând parametrii hibridi ai diporților constituenți.

Examinând legarea în paralel a doi diporți, vezi figura 3.40, se constată că definitoriul pentru această conectare este faptul că:

➤ *curenții de intrare din cei doi diporți D' , D'' sunt egali între ei, fiind de asemenea egali cu curentul de intrare corespunzător diportului echivalent D .*

➤ *tensiunile de ieșire a celor doi diporți D' , D'' sunt egale între ele, fiind de asemenea egale cu tensiunea de ieșire corespunzătoare diportului echivalent D .*

Din punct de vedere matematic aceste relații, scrise la ambele porți au expresiile:

$$\begin{cases} I_1 = I_1' = I_1'' \\ U_2 = U_2' = U_2'' \end{cases} \quad (3.115)$$

Teoremă

➤ Matricea parametrilor hibridi a diportului obținut prin **interconectarea serie-parallel** a n diporți este **suma parametrilor hibridi ai diporților componenți**.

Scriind teorema lui Kirchhoff de tensiuni la poarta de intrare, respectiv teorema lui Kirchhoff de curenți la nodurile de la ieșire, rezultă că:

$$\begin{cases} U_1 = U_1' + U_1'' \\ I_2 = I_2' + I_2'' \end{cases} \quad (3.116)$$

Se notează cu \mathbf{h}' și \mathbf{h}'' matricele hibride pentru diporții D' și D'' .

Conform (3.45) ecuațiile matriceale ale parametrilor de hibridi pentru cei doi diporți constituenți D' , D'' sunt:

$$\begin{bmatrix} U_1' \\ I_2' \end{bmatrix} = \mathbf{h}' \begin{bmatrix} I_1' \\ U_2' \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} U_1'' \\ I_2'' \end{bmatrix} = \mathbf{h}'' \begin{bmatrix} I_1'' \\ U_2'' \end{bmatrix} \quad (3.117)$$

Pentru diportul echivalent D , scrierea ecuațiilor matriceale pentru parametrii hibridi duce la următoarea expresie:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} U_1 \\ I_2 \end{bmatrix} &\stackrel{(3.116)}{=} \begin{bmatrix} U_1' + U_1'' \\ I_2' + I_2'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1' \\ I_2' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U_1'' \\ I_2'' \end{bmatrix} \stackrel{(3.117)}{=} \mathbf{h}' \begin{bmatrix} I_1' \\ U_2' \end{bmatrix} + \mathbf{h}'' \begin{bmatrix} I_1'' \\ U_2'' \end{bmatrix} \stackrel{(3.115)}{=} \\ &= \mathbf{h}' \begin{bmatrix} I_1 \\ U_2 \end{bmatrix} + \mathbf{h}'' \begin{bmatrix} I_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = (\mathbf{h}' + \mathbf{h}'') \begin{bmatrix} I_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \mathbf{h}_{SP} \begin{bmatrix} I_1 \\ U_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

unde \mathbf{h}_{SP} este matricea hibridă a diportului echivalent. În concluzie se poate scrie că:

$$\mathbf{h}_{SP} = \mathbf{h}' + \mathbf{h}'' \quad (3.118)$$

3.4.4. Legarea în cascadă a diporților

Legarea în cascadă a doi diporți este prezentată în figura 3.41.

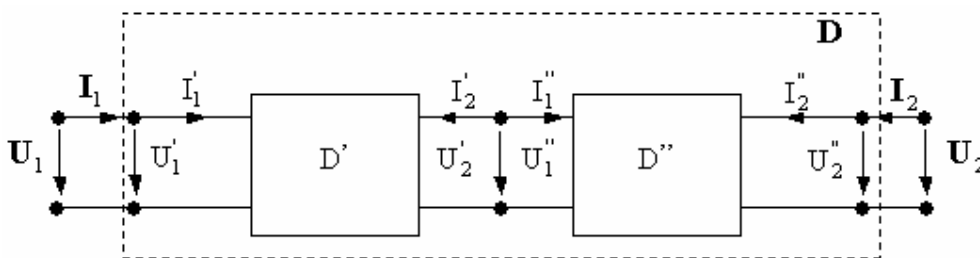


Fig. 3.41. Interconectarea diporților în cascadă

Conectarea diporților în cascadă este frecventă în alcatuirea lanțurilor de circuite, destinate transmiterii semnalelor. Din această cauză parametrii A se numesc de către specialiștii în telecomunicații parametrii fundamentali.

La interconectarea în cascadă a diporților, parametrii diportului echivalent D pot fi *cel mai simplu* obținuți utilizând parametrii fundamentali ai diporților constituenți.

Teoremă

➤ Matricea parametrilor fundamentali a diportului obținut prin **interconectarea în cascadă** a n diporți este **produsul matriceal al matricelor de transfer ale diporților componenți**, considerate în produs în ordinea corespunzătoare conectării diporților în cascadă.

Teorema se va demonstra pentru conectarea în serie a doi diporți, generalizarea fiind banală.

Examinând legarea în cascadă a doi diporți, vezi figura 3.41, se constată că definitoriu pentru această conectare este faptul că:

➤ *mărimile de intrare ale diportului echivalent \mathbf{D} sunt egale cu mărimile de intrare ale diportului D' .*

➤ *mărimile de ieșire ale diportului echivalent \mathbf{D} sunt egale cu mărimile de ieșire ale diportului D'' .*

➤ *curentul de ieșire din diportul D' , este egal cu curentul de intrare în diportul D'' .*

➤ *tensiunea de la ieșirea diportului D , este egală cu tensiunea de la intrarea diportului D'' .*

Din punct de vedere matematic aceste relații, au expresiile:

$$\begin{cases} I_1 = I_1'; U_1 = U_1' \\ I_2 = I_2''; U_2 = U_2'' \\ I_2' = -I_1'' \\ U_2' = U_1'' \end{cases} \quad (3.119)$$

Se notează cu \mathbf{A}' și \mathbf{A}'' matricele fundamentale pentru diporții D' și D'' .

Conform (3.28) ecuațiile matriceale ale parametrilor de hibridi pentru cei doi diporți constituenți D' , D'' sunt:

$$\begin{bmatrix} U_1' \\ I_1' \end{bmatrix} = \mathbf{A}' \begin{bmatrix} U_2' \\ -I_2' \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} U_1'' \\ I_1'' \end{bmatrix} = \mathbf{A}'' \begin{bmatrix} U_2'' \\ -I_2'' \end{bmatrix} \quad (3.120)$$

Pentru diportul echivalent \mathbf{D} , scrierea ecuațiilor matriceale pentru parametrii fundamentali duce la următoarea expresie:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} &\stackrel{(3.119)}{=} \begin{bmatrix} U_1' \\ I_1' \end{bmatrix} \stackrel{(3.120)}{=} \mathbf{A}' \begin{bmatrix} U_2' \\ -I_2' \end{bmatrix} \stackrel{(3.119)}{=} \mathbf{A}' \begin{bmatrix} U_1'' \\ I_1'' \end{bmatrix} \stackrel{(3.120)}{=} \\ &= \mathbf{A}' \mathbf{A}'' \begin{bmatrix} U_2'' \\ -I_2'' \end{bmatrix} \stackrel{(3.119)}{=} \mathbf{A}' \mathbf{A}'' \begin{bmatrix} U_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} = \mathbf{A}_L \begin{bmatrix} U_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

unde \mathbf{A}_L este matricea fundamentală a diportului echivalent. În concluzie se poate scrie că:

$$\mathbf{A}_L = \mathbf{A}' \mathbf{A}'' \quad (3.121)$$

Observație:

➤ Produsul matriceal nu este comutativ, de aceea este esențial ca în (3.121) matricele să fie aranjate în ordinea conectării diporților în cascadă.

Exemplu

Se consideră circuitul examinat în exemplul 3.2.8.3, figura 3.23 (atenuator nesimetric în T). Să se deducă parametrii fundamentali ai acestui circuit considerându-l ca pe un lanț de diporți conectați în cascadă.

În figura 3.42 se pune în evidență descompunerea atenuatorului nesimetric în T în trei cuadripoli elementari, legați în cascadă.

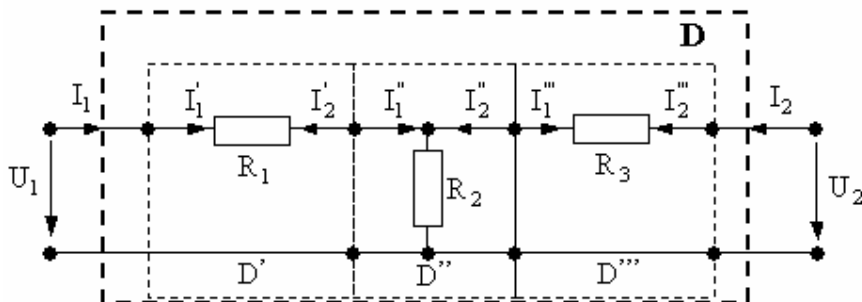


Fig. 3.42. Descompunerea atenuatorului nesimetric în T (diportul \mathbf{D}) în trei diporți elementari \mathbf{D}' , \mathbf{D}'' , \mathbf{D}''' , legați în cascadă

Se observă că diporții elementari ce constituie diportul în T, sunt rezistoare legate fie în serie fie în paralel între intrare, respectiv ieșire. Determinarea parametrilor fundamentali pentru aceste tipuri de cuadripoli a fost tratată în 3.3.1, respectiv 3.3.2.

Conform (3.72) și (3.80) matricelor diporților constituenți \mathbf{A}' ; \mathbf{A}'' ; \mathbf{A}''' au expresiile:

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} 1 & R_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \mathbf{A}'' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{R_2} & 1 \end{bmatrix}; \mathbf{A}''' = \begin{bmatrix} 1 & R_3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Conform (3.121)

$$\mathbf{A}_T = \mathbf{A}' \mathbf{A}'' \mathbf{A}''' = \begin{bmatrix} 1 & R_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{R_2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & R_3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{R_1}{R_2} & R_1 + \frac{R_1 R_3}{R_2} + R_3 \\ \frac{1}{R_2} & 1 + \frac{R_3}{R_2} \end{bmatrix} \quad (3.122)$$

Observație:

- Schimbând ordinea matricelor în produs, de exemplu $\mathbf{A}' \mathbf{A}''' \mathbf{A}''$ se găsește matricea:

$$\mathbf{A}_\Gamma = \mathbf{A}' \mathbf{A}''' \mathbf{A}'' = \begin{bmatrix} 1 & R_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & R_3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{R_2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{R_1 + R_3}{R_2} & R_1 + R_3 \\ \frac{1}{R_2} & 1 \end{bmatrix} \quad (3.123)$$

Expresia (3.123) este evident diferită de (3.122) ea definind alt circuit, vezi figura 3.43.

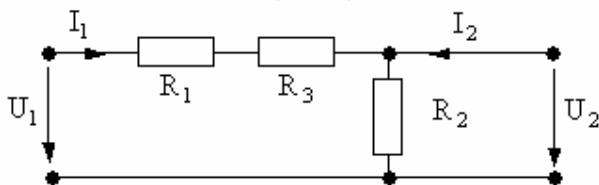


Fig. 3.43. Atenuator nesimetric în Γ

Observația subliniază importanța corelării între ordinea matricelor în produs și ordinea conectării diporților în cascadă.

3.5 Parametrii diporților închiși pe terminații ideale

Diporții pasivi sunt o categorie importantă de circuite utilizate în sistemele electronice și de telecomunicații. Funcțiile lor principale sunt legate de modul în care puterea aplicată la o poartă este consumată sau transferată la cealaltă poartă. Datorită puterii disipate funcțiile acestor diporți nu sunt definite prin raportul a două semnale (U și/sau I), ci prin raportul produsului a două semnale (UI și/sau U^2, I^2).

O particularitate importantă a diporților pasivi este faptul că aceștia lucrează de obicei conectați în cascadă. De aici decurge importanța familiei parametrilor fundamentali în caracterizarea regimului lor de lucru.

Parametrii matriceali reprezintă funcții de circuit ale diporților cu terminale limită la porți (în gol sau scurtcircuit). În realitate, uniporții care închid porțile diportului au impedanțe interne nenule și finite, care trebuie luate în considerație. Un diport considerat izolat se tratează ca fiind conectat între:

- un generator de semnal (excitație), echivalent lanțului de transmisie din aval; Generatorul de semnal este echivalat de o tensiune electromotoare, E și de impedanța internă Z_g ;

- o sarcină, Z_S care este impedanța echivalentă lanțului de transmisie din aval; Schema interconectării unui astfel de diport este prezentată în figura 3.44.

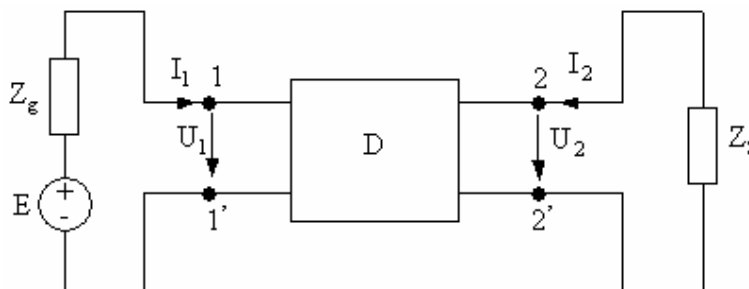


Fig. 3.44. Diport conectat între generator și sarcină

În practică, de cele mai multe ori Z_g și Z_S sunt rezistențe.

3.5.1. Adaptare la poartă

La fiecare poartă ($1,1'$) a lanțului de telecomunicații transmisia se face de la un generator de impedanță internă Z_g și o t.e.m. E , la o sarcină Z_S , vezi figura 3.45.

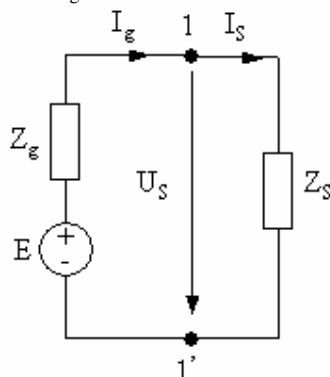


Fig. 3.45. Impedanțe conectate la o poartă

Se numește adaptare la o poartă, satisfacerea condiției de egalitate între impedanțele conectate la poartă:

$$Z_g = Z_S \quad (3.124)$$

Din punctul de vedere al adaptării/neadaptării la o poartă de analizează următorii trei parametri:

- Transferul de putere;
- Coeficientul de transmisie;
- Coeficientul de neadaptare;

a) Transferul de putere

Transferul de putere de la generator la sarcină, prin poarta $(1,1')$ este definit de puterea aparentă debitată pe sarcină:

$$S = U_S I_S \quad (3.125)$$

- neadaptare la poartă $Z_g \neq Z_S$

Aplicând pe schema din figura 3.45 teoremele lui Kirchhoff de tensiune și curent se obține:

$$\begin{cases} U_S = I_S Z_S \\ E = I_S Z_S + I_g Z_g \\ I_S = I_g \end{cases} \quad (3.126)$$

Aplicând (3.126) la (3.125) rezultă că:

$$S = \left[\frac{E}{Z_S + Z_g} \right]^2 Z_S \quad (3.127)$$

În cazul în care $Z_g = R_g$, $Z_S = R_S$ rezultă că:

$$S = \left[\frac{E}{R_S + R_g} \right]^2 R_S \quad (3.128)$$

- adaptare la poartă $Z_g = Z_S$

Aplicând (3.124) la (3.127) rezultă că:

$$S_0 = U_0 I_0 = \frac{E^2}{4Z_g} \quad (3.129)$$

Important:

➤ În cazul adaptării la poartă (a generatorului cu sarcina) se realizează transferul maxim de putere (de la generator la sarcină).

Uzual se folosesc notațiile:

$$Z_g = Z_S = Z_0; S_0 = \frac{E^2}{4Z_0} \quad (3.130)$$

Demonstrarea “coincidenței” dintre adaptarea la poartă și transferul maxim de putere se poate arăta ușor pornind de la expresia puterii aparente debitate în sarcină, punând condiția ca aceasta să fie maximă.

Condiția de extrem (se poate demonstra simplu că acest extrem este un maxim) pentru puterea aparentă debitată pe sarcină, (3.127) este următoarea:

$$\frac{dS}{dZ_s} = 0 \quad (3.131)$$

Explicitând (3.131) rezultă că:

$$E^2 \frac{(Z_s + Z_g)^2 - 2Z_s(Z_s + Z_g)}{(Z_s + Z_g)^4} = 0 \Rightarrow \frac{(Z_s + Z_g) - 2Z_s}{(Z_s + Z_g)^3} = 0 \Rightarrow Z_g - Z_s = 0$$

adică (3.124), condiția de adaptare la poartă.

b) Coeficient de transmisie

Se numește coeficient de transmisie t , la o poartă, rădăcina pătrată din raportul între produsul $U_S I_S$ obținut în sarcină și același produs obținut în sarcină la adaptare ($U_0 I_0$).

$$t^2 = \frac{U_S I_S}{U_0 I_0} \quad (3.132)$$

- neadaptare la poartă $Z_g \neq Z_s$

Conform (3.127) și (3.129) rezultă că:

$$t^2 = \frac{4Z_s Z_g}{(Z_s + Z_g)^2} \quad (3.133)$$

de unde:

$$t = \frac{2\sqrt{Z_s Z_g}}{Z_s + Z_g} \quad (3.134)$$

Observații:

- Din punct de vedere matematic se demonstrează că în cazul neadaptării $t < 1$ (3.135)

- Se definește

$$U_r I_r = U_0 I_0 - U_S I_S \quad (3.136)$$

ca fiind ca fiind produsul dintre semnalele U și I care “se pierde” datorită neadaptării.

Utilizând noțiunile din propagarea undelor se afirmă că acesta este produsul UI reflectat datorită neadaptării. Această terminologie este preluată din microunde și nu are un suport fizic în cazul circuitelor cu parametri concentrați, dar se dovedește utilă la aprecierea calitativă a proprietăților diporților. Utilizând pentru $U_r I_r$ sensul propus, rezultă că $|U_r I_r|$ reprezintă în modul, puterea aparentă reflectată:

$$S_r = |U_0 I_0 - U_S I_S| \quad (3.137)$$

- adaptare la poartă $Z_g = Z_s$

Aplicând (3.124) la (3.134) rezultă că:

$$t = 1 \quad (3.138)$$

c) Coeficient de neadaptare

Se numește coeficient de neadaptare ρ , la o poartă, rădăcina pătrată din raportul între $U_r I_r$ și $U_0 I_0$.

$$\rho^2 = \frac{U_r I_r}{U_0 I_0} \quad (3.139)$$

- neadaptare la poartă $Z_g \neq Z_S$

Conform (3.136) și (3.129) și (3.127) rezultă că:

$$U_r I_r = \frac{E^2}{4Z_g} - \left[\frac{E}{Z_S + Z_g} \right]^2 Z_S = \frac{E^2}{4Z_g} \left(\frac{Z_S - Z_g}{Z_S + Z_g} \right)^2 = U_0 I_0 \left(\frac{Z_S - Z_g}{Z_S + Z_g} \right)^2 \quad (3.140)$$

de unde, conform (3.139), rezultă că:

$$\rho = \left(\frac{Z_S - Z_g}{Z_S + Z_g} \right) \quad (3.141)$$

- adaptare la poartă $Z_g = Z_S$

Aplicând (3.124) la (3.141) rezultă că:

$$\rho = 0 \quad (3.142)$$

Problema adaptării are mai multe aspecte.

La adaptarea pentru transferul maxim de putere de la un generator la o sarcină, impedanțele văzute în cele două sensuri trebuie conjugate.

La adaptarea pe imagine impedanțele văzute în cele două sensuri, la punctul de joncțiune al unui generator cu o sarcină, trebuie să fie egale.

Adaptarea pe imagine interesează în special în transmisiunile telefonice, unde se caută să se evite neadaptările în vederea redării cât mai uniforme a oscilațiilor într-o bandă de frecvență.

Adaptarea pe imagine este echivalentă cu adaptarea pentru transferul maxim de putere, atunci când impedanțele sunt rezistențe pure.

Problema mai generală a adaptării constă în transformarea unei impedanțe de sarcină într-o altă impedanță, egală cu impedanța optimă de lucru a generatorului, care în general nu este egală cu impedanța internă.

Pentru realizarea unei transformări de impedanțe se utilizează rețele de adaptare care nu sunt altceva decât cuadripoli. Pentru ca transformarea să se facă fără pierderi de energie, ar trebui ca rețeaua să fie formată din reactanțe pure. În realitate, această condiție nu poate fi decât în parte realizată.

3.5.2. Rețele simple de adaptare de impedanțe

În figura 3.46 sunt prezentate două rețele simple de adaptare. R_S reprezintă sarcina, iar R_0 este rezistența în care trebuie transformată. Pentru a realiza transformarea $R_S \rightarrow R_0$, în amonte de R_S se conectează un diport de adaptare D' . În figura 3.46 se prezintă doi astfel de diporturi de adaptare.

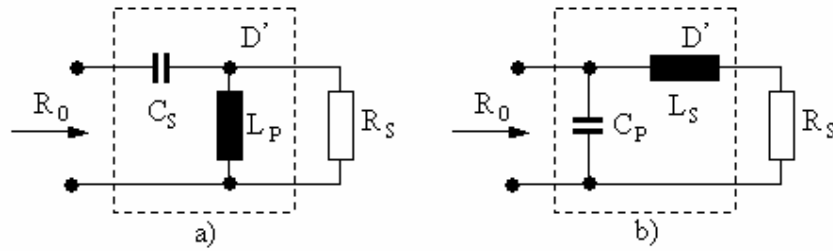


Fig. 3.46. Rețele simple de adaptare

➤ Diportul de adaptare 3.46a)

$$R_0 = X_{C_S} + (X_{L_P} \parallel R_S) = \frac{1}{j\omega C_S} + \frac{j\omega L_P R_S}{j\omega L_P + R_S} = -j \frac{1}{\omega C_S} + \frac{j\omega L_P R_S (R_S - j\omega L_P)}{R_S^2 + \omega^2 L_P^2} \Rightarrow$$

$$R_0 = \frac{\omega^2 L_P^2 R_S}{R_S^2 + \omega^2 L_P^2} + j \left(\frac{\omega L_P R_S^2}{R_S^2 + \omega^2 L_P^2} - \frac{1}{\omega C_S} \right) \Rightarrow \begin{cases} R_0 = \frac{\omega^2 L_P^2 R_S}{R_S^2 + \omega^2 L_P^2} \\ 0 = \frac{\omega L_P R_S^2}{R_S^2 + \omega^2 L_P^2} - \frac{1}{\omega C_S} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} L_P = \frac{R_S}{\omega} \sqrt{\frac{R_0}{R_S - R_0}} \\ C_S = \frac{1}{\omega R_0} \sqrt{\frac{R_0}{R_S - R_0}} \end{cases} \quad (3.143)$$

Se observă, conform (3.143) că trebuie îndeplinită condiția:

$$R_S > R_0 \quad (3.144)$$

ceea ce înseamnă că diportul de adaptare din figura 3.46a) poate fi utilizat doar în cazul în care printr-un diport de adaptare se dorește *micșorarea* valorii rezistenței de sarcină.

➤ Diportul de adaptare 3.48b)

$$R_0 = X_{C_P} \parallel (X_{L_S} + R_S) = \frac{1}{\frac{1}{j\omega C_P} + R_S + j\omega L_S} = \frac{R_S + j\omega L_S}{1 + j\omega C_P (R_S + j\omega L_S)} \Rightarrow$$

$$R_0 = \frac{R_S + j\omega L_S}{1 - \omega^2 L_S C_P + j\omega C_P R_S} = \frac{(R_S + j\omega L_S) \cdot [(1 - \omega^2 L_S C_P) - j\omega C_P R_S]}{(1 - \omega^2 L_S C_P)^2 + \omega^2 C_P^2 R_S^2} \Rightarrow$$

$$R_0 = \frac{R_S(1 - \omega^2 L_S C_P) + \omega^2 L_S C_P R_S + j[\omega L_S(1 - \omega^2 L_S C_P) - \omega C_P R_S^2]}{(1 - \omega^2 L_S C_P)^2 + \omega^2 C_P^2 R_S^2} \Rightarrow$$

$$R_0 = \frac{R_S}{(1 - \omega^2 L_S C_P)^2 + \omega^2 C_P^2 R_S^2} + j \frac{\omega L_S(1 - \omega^2 L_S C_P) - \omega C_P R_S^2}{(1 - \omega^2 L_S C_P)^2 + \omega^2 C_P^2 R_S^2} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} R_0 = \frac{R_S}{(1 - \omega^2 L_S C_P)^2 + \omega^2 C_P^2 R_S^2} \Rightarrow \left((1 - \omega^2 L_S C_P)^2 + \omega^2 C_P^2 R_S^2 = \frac{R_S}{R_0} \Rightarrow \right. \\ \left. 0 = L_S(1 - \omega^2 L_S C_P) - C_P R_S^2 \right. \\ \left. C_P = \frac{L_S}{R_S^2 + \omega^2 L_S^2} \right. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 - 2\omega^2 L_S C_P + \omega^2 C_P^2 (R_S^2 + \omega^2 L_S^2) = \frac{R_S}{R_0} \Rightarrow \\ C_P = \frac{L_S}{R_S^2 + \omega^2 L_S^2} \end{cases}$$

$$1 - 2\omega^2 L_S \frac{L_S}{R_S^2 + \omega^2 L_S^2} + \omega^2 \frac{L_S^2}{(R_S^2 + \omega^2 L_S^2)^2} (R_S^2 + \omega^2 L_S^2) = \frac{R_S}{R_0} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} L_S = \frac{1}{\omega} \sqrt{(R_0 - R_S)} \\ C_P = \frac{1}{\omega R_0} \sqrt{\frac{R_0 - R_S}{R_S}} \end{cases} \quad (3.145)$$

Se observă, conform (3.145) că trebuie îndeplinită condiția:

$$R_S < R_0 \quad (3.146)$$

ceea ce înseamnă că diportul de adaptare din figura 3.46b) poate fi utilizat doar în cazul în care printr-un diport de adaptare se dorește *mărirea* valorii rezistenței de sarcină.

3.5.3. Rețele de adaptare utilizate la eliminarea oscilațiilor nedorite

Adeseori se pune problema ca rețeaua de adaptare să atenueze în cât mai mare măsură anumite oscilații nedorite, de exemplu să atenueze armonicile sau unele oscilații parazite, la alimentarea unei antene de la emițător.

În figura 3.47 este prezentată o rețea de atenuare a oscilației de 50 Hz. Valorile bobinei și a condensatorului sunt alese astfel încât la frecvența parazită ($f_0 = 50\text{Hz}$) impedanța ramurii de circuit ce le conține să fie foarte mică (în mod ideal $Z_a|_{f=f_0} = 0$).

Expresia impedanței Z_a este:

$$Z_a = j\omega L_a + \frac{1}{j\omega C_a} = j \left(\omega L_a - \frac{1}{\omega C_a} \right) \quad (3.147)$$

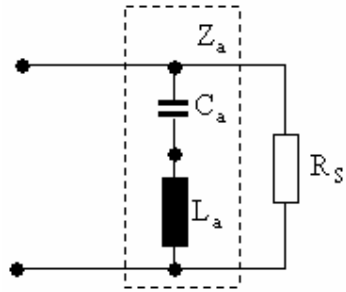


Fig. 3.47. Rețea de eliminare a oscilațiilor nedorite

Punând condiția ca la $f = f_0$; $\omega = \omega_0$ impedanța Z_a să scurcircuiteze sarcina R_s rezultă că:

$$Z_a|_{f=f_0} = 0 \Rightarrow \omega_0 L_a - \frac{1}{\omega_0 C_a} = 0 \Rightarrow L_a C_a = \frac{1}{\omega_0^2} \quad (3.148)$$

La frecvența de lucru $\omega_1 \neq \omega_0$ impedanța Z_a are valoare mare, astfel încât $Z_a \parallel R_s \approx R_s$

3.5.4. Parametrii imagine. Generalități

În lanțurile de transmisiuni este necesar să se realizeze adaptarea la ambele porți ale diportului. Aceasta coincide în majoritatea cazurilor practice cu transferul maxim de putere.

Este util să se cunoască pe ce impedanță trebuie terminat diportul, dacă se dorește adaptarea la ambele porți. Fie Z_{01} și Z_{02} aceste impedanțe particulare. Situația ideală cu adaptare la ambele porți este prezentată în figura 3.48.

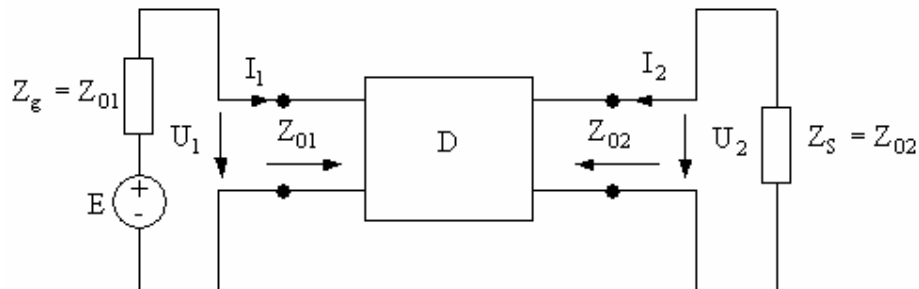


Fig. 3.48. Diport adaptat la ambele porți

Pentru a defini complet diportul mai sunt necesare, pe lângă Z_{01} și Z_{02} , alte două funcții de circuit, care vor defini transferul semnalelor prin diport. Deoarece diportii sunt conectați aproape întotdeauna în cascadă, este avantajos să se considere o funcție de transfer logaritmică, în condiții de adaptare. În consecință, se definesc următorii doi parametrii imagine:

- Impedanțe imagine;
- Exponent de transfer pe imagine;

a) Impedanțe imagine

Definiție:

➤ Impedanțele proprii diportului, care permit realizarea adaptării la ambele porți se numesc impedanțe imagine.

Impedanțele imagine depind doar de diport. În figura 3.49 sunt prezentate schemele prin care se definesc impedanțele imagine.

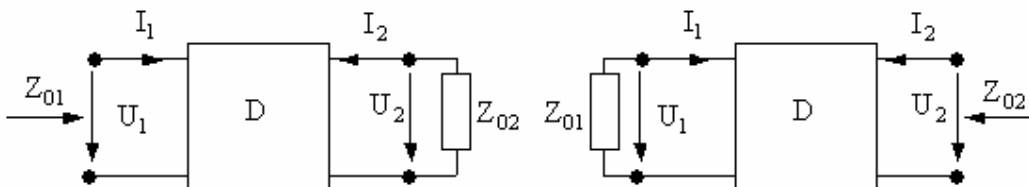


Fig. 3.49. Definierea impedanțelor imagine: a) Z_{01} ; b) Z_{02} .

Conform figurii 3.49 se poate scrie că:

$$Z_{01} = \frac{U_1}{I_1} \bigg|_{\substack{U_2=Z_{02} \\ -I_2}} \quad (3.149)$$

$$Z_{02} = \frac{U_2}{I_2} \bigg|_{\substack{U_1=Z_{01} \\ -I_1}} \quad (3.150)$$

Impedanțele imagine se definesc simultan la ambele porți una cu ajutorul celeilalte. Nedeterminarea aparentă nu există, căci pentru cele două necunoscute sunt două relații de definiție.

În cazul în care diportul este simetric (comportarea electrică la cele două porți este identică) se scrie că:

$$Z_{01} = Z_{02} = Z_c \quad (3.151)$$

unde Z_c se numește impedanța caracteristică.

b) Exponent de transfer pe imagine

Definiții:

➤ Se numește exponent de transfer pe imagine de la poarta 1 (intrare) la poarta 2 (ieșire), funcția de transfer logarimică definită prin relația:

$$g_{12} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{U_1 I_1}{-U_2 I_2} \right) \quad (3.152)$$

în condiții de adaptare a diportului.

➤ Se numește exponent de transfer pe imagine de la poarta 2 (ieșire) la poarta 1 (intrare), funcția de transfer logarimică definită prin relația:

$$g_{21} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{U_2 I_2}{-U_1 I_1} \right) \quad (3.153)$$

în condiții de adaptare a diportului.

Pentru diporți reciproci (transferul semnalelor de la intrare la ieșire, respectiv de la ieșire la intrare se face identic) există relația:

$$g_{12} = g_{21} = g \tag{3.154}$$

În cele ce urmează se presupune că diporții sunt reciproci.

Conform figurii 3.49 se poate scrie că:

$$U_1 = Z_{01}I_1; U_2 = Z_{02}I_2 \tag{3.155}$$

Din (3.151), (3.153) și (3.154) se poate scrie că:

$$g = \ln \frac{U_1}{U_2} \sqrt{\frac{Z_{02}}{Z_{01}}} = \ln \frac{I_1}{-I_2} \sqrt{\frac{Z_{01}}{Z_{02}}} \tag{3.156}$$

în cazul în care diportul este simetric rezultă că:

$$g = \ln \frac{U_1}{U_2} = \ln \frac{I_1}{-I_2} \tag{3.157}$$

Din punct de vedere matematic exponentul de transfer pe imagine este o mărime complexă, $g = a + jb$.

Partea reală, respectiv imaginară au următoarele semnificații fizice:

- Atenuarea pe imagini, reprezintă partea reală a exponentului de transfer:

$$a = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{U_1 I_1}{U_2 I_2} \right| = \ln \left| \frac{U_1}{U_2} \sqrt{\frac{Z_{02}}{Z_{01}}} \right| = \ln \left| \frac{I_1}{I_2} \sqrt{\frac{Z_{01}}{Z_{02}}} \right| \tag{3.158}$$

- Defazarea pe imagini, reprezintă partea imaginară exponentului de transfer:

$$b = \arg \left\{ \frac{U_1 I_1}{-U_2 I_2} \right\} \tag{3.159}$$

Observație:

- Atunci când Z_{01} și Z_{02} sunt rezistive, atenuarea pe imagini reprezintă pierderea de putere reală, în condiții ideale de transfer.

Important:

- În cazul în care se conectează adaptat doi diporți, exponentul de transfer pe imagine al diportului echivalent este egal cu suma exponenților de transfer pe imagine ai diporților constituenți.

Fie doi diporți D' și D'' conectați adaptat, ca în figura 3.50, astfel ca ansamblul celor doi diporți constituie diportul echivalent D .

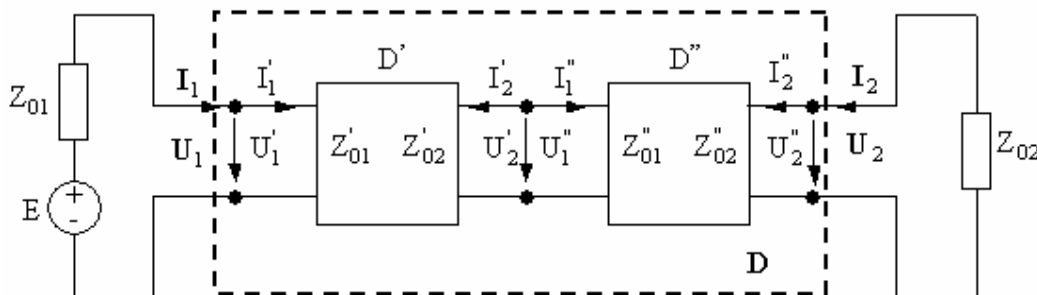


Fig. 3.50. Lanț de doi diporți adaptați

Deoarece s-a presupus că există adaptare la cele trei porți (generator/ D' ; D'/D'' ; $D''/sarcină$), se poate scrie că:

$$Z_{01} = Z'_{01} ; Z'_{02} = Z''_{01} ; Z''_{02} = Z_{02} \quad (3.160)$$

Utilizând notațiile de pe figura 3.50, se poate scrie că:

$$g = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{U_1 I_1}{-U_2 I_2} \right) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{U'_1 I'_1}{-U''_2 I''_2} \right) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{U'_1 I'_1}{-U'_2 I'_2} \frac{U''_1 I''_1}{-U''_2 I''_2} \right) \quad (3.161)$$

sau

$$g = g' + g'' \quad (3.162)$$

Observație:

➤ Relația (3.162) poate fi extinsă la cazul a n diporți conectați în cascadă, cu adaptare la toate porțile.

➤ Notând $g_i = a_i + jb_i$ exponentul de transfer pe imagine al diportului i din lanțul astfel creat, exponentul de transfer pe imagine $g = a + jb$ al întregului lanț, devine:

$$g = \sum_i^n g_i ; a = \sum_i^n a_i ; b = \sum_i^n b_i \quad (3.163)$$

Simplitatea relațiilor (3.163) justifică utilizarea funcțiilor de transfer logaritmice.

În practică, de cele mai multe ori Z_g și Z_S sunt rezistențe.

3.5.5. Legătura parametrilor imagine cu parametrii fundamentali

Stabilirea legăturii parametrilor imagine cu parametrii fundamentali A, permite ca utilizând tabelul 3.2.1 să se poată trece, de la parametrii imagine, la orice alt set de parametri.

Prin prelucrarea setului de ecuații ce definesc parametrii fundamentali rezultă că:

$$Z_{01} = \frac{U_1}{I_1} \Big|_{\substack{U_2=Z_{02} \\ -I_2}} \stackrel{(3.28)}{=} \frac{A_{11}U_2 - A_{12}I_2}{A_{21}U_2 - A_{22}I_2} \Big|_{\substack{U_2=Z_{02} \\ -I_2}} = \frac{A_{11} \frac{U_2}{I_2} - A_{12}}{A_{21} \frac{U_2}{I_2} - A_{22}} \Big|_{\substack{U_2=Z_{02} \\ -I_2}} \Rightarrow$$

$$Z_{01} = \frac{A_{11}Z_{02} + A_{12}}{A_{21}Z_{02} + A_{22}} \quad (3.164)$$

analog

$$Z_{02} = \frac{A_{22}Z_{01} + A_{12}}{A_{21}Z_{01} + A_{11}} \quad (3.165)$$

Din sistemul de ecuații format de (3.164) și (3.165) rezultă că:

$$Z_{01} = \sqrt{\frac{A_{11}A_{12}}{A_{21}A_{22}}} ; Z_{02} = \sqrt{\frac{A_{22}A_{12}}{A_{21}A_{11}}} \quad (3.166)$$

Observație:

➤ Se poate scrie, conform (3.166) că:

$$\frac{Z_{01}}{Z_{02}} = \frac{A_{11}}{A_{22}} ; Z_{01}Z_{02} = \frac{A_{12}}{A_{21}} \quad (3.167)$$

Pentru exprimarea exponentului de transfer pe imagine (reamintim pentru cazul diporților reciproci) funcție de parametrii fundamentali se utilizează (3.150) și (3.156), astfel:

$$g = \ln \frac{I_1}{-I_2} \sqrt{\frac{Z_{01}}{Z_{02}}} \stackrel{(3.28)}{=} \ln \left[\left(-A_{21} \frac{U_2}{I_2} + A_{22} \right) \sqrt{\frac{Z_{01}}{Z_{02}}} \right] = \ln \left[(A_{21}Z_{02} + A_{22}) \sqrt{\frac{Z_{01}}{Z_{02}}} \right] \stackrel{(3.157)}{\Rightarrow}$$

$$g = \ln \left[(A_{21}Z_{02} + A_{22}) \sqrt{\frac{A_{11}}{A_{22}}} \right] \stackrel{(3.156)}{=} \ln \left[\left(A_{21} \sqrt{\frac{A_{22}A_{12}}{A_{21}A_{11}}} + A_{22} \right) \sqrt{\frac{A_{11}}{A_{22}}} \right]$$

și în final

$$g = \ln \left(\sqrt{A_{11}A_{22}} + \sqrt{A_{12}A_{21}} \right) \quad (3.168)$$

sau

$$e^g = \ln \left[(A_{21}Z_{02} + A_{22}) \sqrt{\frac{Z_{01}}{Z_{02}}} \right] \quad (3.169)$$

Din (3.166) și (3.169) se pot găsi relațiile inverse (parametrii fundamentali sunt exprimați funcție de parametrii imagine):

$$\left[\begin{array}{l} A_{11} = \sqrt{\frac{Z_{01}}{Z_{02}}} \operatorname{ch}g \quad A_{12} = \sqrt{Z_{01}Z_{02}} \operatorname{sh}g \\ A_{11} = \frac{\operatorname{sh}g}{\sqrt{Z_{01}Z_{02}}} \quad A_{22} = \sqrt{\frac{Z_{02}}{Z_{01}}} \operatorname{ch}g \end{array} \right] \quad (3.170)$$

Reamintim definiția expresiilor $\operatorname{sh}x$, $\operatorname{ch}x$ (sinus, respectiv cosinus hiperbolic):

$$\operatorname{sh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} ; \operatorname{ch}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad (3.171)$$

Conform relației dintre parametrii fundamentali și parametrii imagine (3.160), ecuațiile fundamentale ale diporților (3.28), devin:

$$\left\{ \begin{array}{l} U_1 = U_2 \sqrt{\frac{Z_{01}}{Z_{02}}} \operatorname{ch}g - I_2 \sqrt{Z_{01}Z_{02}} \operatorname{sh}g \\ I_1 = U_2 \frac{\operatorname{sh}g}{\sqrt{Z_{01}Z_{02}}} - I_2 \sqrt{\frac{Z_{02}}{Z_{01}}} \operatorname{ch}g \end{array} \right.$$

Observație:

➤ Impedanțele de gol, sau scurtcircuit (utile în nenumărate aplicații) se pot exprima funcție prin parametri imagine astfel:

$$\begin{cases} Z_{1sc} = \frac{U_1}{I_1} \Big|_{U_2=0} = \frac{1}{y_{11}} = Z_{01} \operatorname{thg} ; Z_{2sc} = \frac{U_2}{I_2} \Big|_{U_1=0} = \frac{1}{y_{22}} = Z_{02} \operatorname{thg} \\ Z_{1g} = \frac{U_1}{I_1} \Big|_{I_2=0} = z_{11} = Z_{01} \operatorname{cthg} ; Z_{2g} = \frac{U_2}{I_2} \Big|_{I_1=0} = z_{22} = Z_{02} \operatorname{cthg} \end{cases} \quad (3.173)$$

de unde:

$$Z_{01} = \sqrt{Z_{1sc} Z_{1g}} ; Z_{02} = \sqrt{Z_{2sc} Z_{2g}} \quad (3.174)$$

$$\operatorname{thg} = \sqrt{\frac{Z_{1sc}}{Z_{1g}}} = \sqrt{\frac{Z_{2sc}}{Z_{2g}}} \quad (3.175)$$

3.5.6. Parametrii iterativi

Utilizarea lanțurilor de diporți cu adaptare poate fi neavantajoasă sub aspect economic și inutilă din punct de vedere tehnic în alte cazuri. Aceasta se întâmplă mai ales la transmiterea unilaterală a semnalelor, când reflexiile de la o poartă nu sunt supărătoare pentru sensul de transmitere invers.

În unele cazuri este avantajos ca impedanța de sarcină de la ieșire să se repete la intrarea în diport. Astfel, la toate porțile, privind spre sensul de transmisie va fi aceeași impedanță. În aceste condiții de lucru se definesc familia de parametri numiți iterativi.

Definiție:

➤ Impedanța iterativă a unui diport relativ la poarta 1, Z_{k1} , este impedanța care, conectată la poarta 2, ca sarcină, apare neschimbată la poarta 1, ca impedanță de intrare.

În figura 3.51a), este ilustrată terminația iterativă Z_{k1} , care este importantă pentru sensul de propagare 1-2. Dacă în definiția precedentă se schimbă sensul de propagare 2-1, se obține definiția impedanței Z_{k2} ilustrată în figura 3.51b).

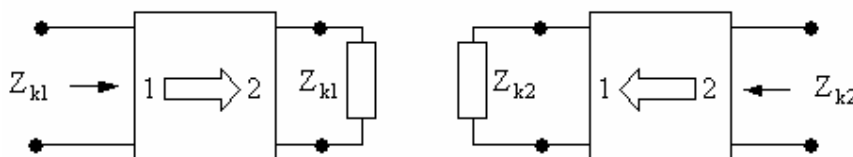


Fig. 3.51. Definierea impedanțelor iterative: a) Z_{k1} ; b) Z_{k2} .

Relațiile analitice de definiție a impedanțelor iterative sunt următoarele:

$$Z_{k1} = \frac{U_1}{I_1} \Big|_{\substack{U_2 = Z_{k1} \\ -I_2}} \quad (3.176)$$

$$Z_{k2} = \frac{U_2}{I_2} \Big|_{\substack{U_1 = Z_{k2} \\ -I_1}} \quad (3.177)$$

În cazul în care diporții sunt simetrici, rezultă că:

$$Z_{k1} = Z_{k2} = Z_{01} = Z_{02} = Z_c \quad (3.178)$$

Definiție:

➤ Exponentul iterativ de propagare pentru sensul de transmisie 1-2 este definit de relația:

$$g_{k1} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{U_1 I_1}{-U_2 I_2} \right) \quad (3.179)$$

cu diportul terminat iterativ prezentat în figura 3.52.

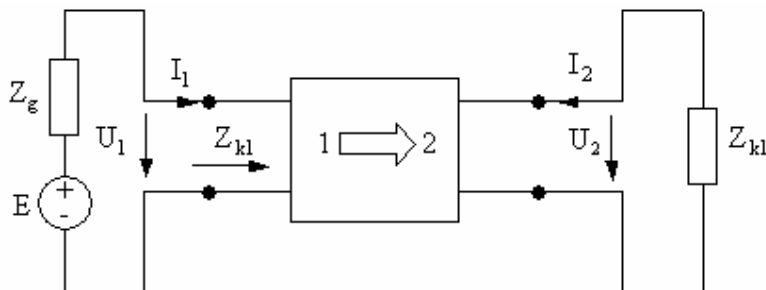


Fig. 3.52. Terminație iterativă pentru sensul de transmitere 1-2

Deoarece (conform figurii 3.52) se poate scrie că:

$$Z_{k1} = \frac{U_1}{I_1}; Z_{k1} = \frac{U_2}{-I_2},$$

rezultă că:

$$g_{k1} = \ln \left(\frac{U_1}{U_2} \right) = \ln \left(\frac{I_1}{I_2} \right) \quad (3.180)$$

Observație:

- Pentru sensul de propagare invers, se definește în mod similar g_{k2} ;
- În cazul în care diporții sunt reciproci se poate scrie că:

$$g_{k1} = g_{k2} = g_k \quad (3.181)$$

Din punct de vedere matematic exponentul iterativ de propagare este o mărime complexă, $g_k = a_k + jb_k$. Partea reală, respectiv imaginară au următoarele semnificații fizice:

- atenuarea iterativă, reprezintă partea reală a exponentului iterativ:

$$a_k = \ln \left| \frac{U_1}{U_2} \right| = \ln \left| \frac{I_1}{I_2} \right| \quad (3.182)$$

- defazarea iterativă, reprezintă partea imaginară exponentului iterativ:

$$b_k = \arg \left\{ \frac{U_1}{U_2} \right\} = \arg \left\{ \frac{I_1}{-I_2} \right\} \quad (3.183)$$

Important:

➤ În cazul în care se conectează doi diporți care au aceeași impedanță iterativă, exponentul iterativ al diportului echivalent este egal cu suma exponenților iterativi ai diporților constituenți.

Fie doi diporți D' și D'' ce au aceeași impedanță iterativă Z_{k1} conectați ca în figura 3.53, astfel ca ansamblul celor doi diporți constituie diportul echivalent D .

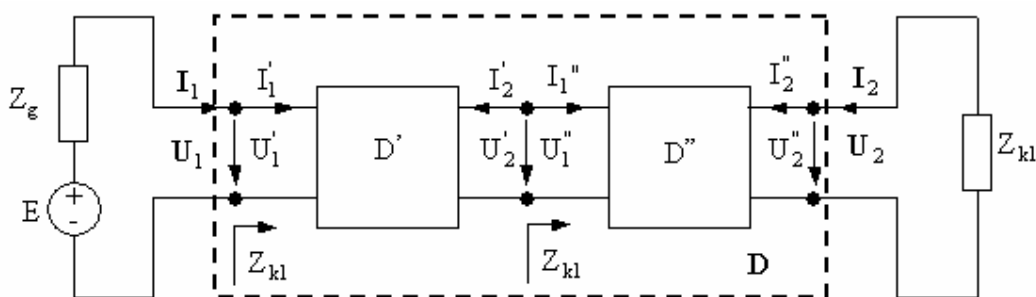


Fig. 3.53. Lanț de doi diporți terminați iterativ

Cei doi diporți având aceeași impedanță iterativă se poate scrie că:

$$Z_{k1} = \frac{U_1'}{I_1'}; Z_{k1} = \frac{U_1''}{I_1''}; Z_{k1} = \frac{U_2}{-I_2} \quad (3.184)$$

și

$$g_{k1} = \ln\left(\frac{U_1'}{U_2'}\right) = \ln\left(\frac{I_1'}{I_2'}\right); g_{k2} = \ln\left(\frac{U_1''}{U_2''}\right) = \ln\left(\frac{I_1''}{I_2''}\right) \quad (3.185)$$

Utilizând notațiile de pe figura 3.53 și conform (3.184) se poate scrie că:

$$g_k = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{U_1 I_1}{-U_2 I_2}\right) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{Z_{k1} (I_1')^2}{Z_{k1} (I_2')^2}\right) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{(I_1')^2 (I_2'')^2}{(I_2')^2 (I_2')^2}\right) \Rightarrow$$

$$g_k = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{(I_1')^2 (I_1'')^2}{(I_2')^2 (I_2'')^2}\right) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{I_1'}{I_2'}\right)^2 + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{I_1''}{I_2''}\right)^2 = \ln\left(\frac{I_1'}{I_2'}\right) + \ln\left(\frac{I_1''}{I_2''}\right) \quad (3.185) \Rightarrow$$

$$g_k = g_{k1} + g_{k2} \quad (3.186)$$

Observație:

➤ Relația (3.186) poate fi extinsă la cazul a n diporți conectați în cascadă, ce au aceeași impedanță iterativă.

➤ Notând $g_{ki} = a_{ki} + jb_{ki}$ exponentul iterativ al diportului i din lanțul astfel creat, exponentul iterativ $g_k = a_k + jb_k$ al întregului lanț, devine:

$$g_k = \sum_i^n g_{ki}; a_k = \sum_i^n a_{ki}; b_k = \sum_i^n b_{ki} \quad (3.187)$$

Un exemplu de lanț de cuadripoli ce are în toate nodurile (k) aceeași impedanță, privind spre sensul de transmisie indicat de săgeți, este rețeaua R-2R, prezentată în figura 3.54.

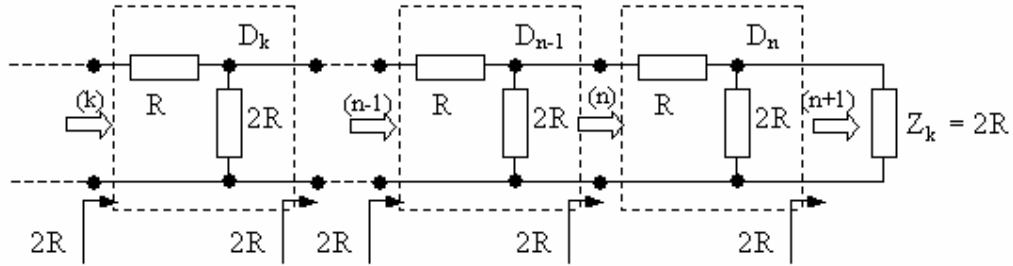


Fig. 3.54. Rețeaua R-2R

- La poarta (n+1): $Z_{(n+1)} = Z_k = 2R$;
- La poarta (n): $Z_{(n)} = R + 2R \parallel Z_{(n+1)} = R + 2R \parallel 2R = R + R = 2R = Z_{(n+1)} = Z_k$;
- La poarta (n-1): $Z_{(n-1)} = R + 2R \parallel Z_{(n)} = R + 2R \parallel 2R = R + R = 2R = Z_{(n)} = Z_k$;
-
- La poarta (k): $Z_{(k)} = R + 2R \parallel Z_{(k+1)} = R + 2R \parallel 2R = R + R = 2R = Z_{(k+1)} = Z_k$;
-

Rețeaua R-2R prezintă o impedanță egală cu 2R față de oricare porțile (k)... (n+1). Această rețea rezistivă este utilizată la convertoarele D/A (digital-analogice).

3.5.7. Legătura parametrilor iterativi cu parametrii fundamentali

Stabilirea legăturii parametrilor iterativi cu parametrii fundamentali A, permite ca utilizând tabelul 3.2.1 să se poată trece, de la parametrii iterativi, la orice alt set de parametri.

Prin prelucrarea setului de ecuații ce definesc parametrii fundamentali rezultă că:

$$Z_{k1} = \frac{U_1}{I_1} \Big|_{\substack{U_2=Z_{k1} \\ -I_2}} \stackrel{(3.28)}{=} \frac{A_{11}U_2 - A_{12}I_2}{A_{21}U_2 - A_{22}I_2} \Big|_{\substack{U_2=Z_{k1} \\ -I_2}} = \frac{A_{11} \frac{U_2}{I_2} - A_{12}}{A_{21} \frac{U_2}{I_2} - A_{22}} \Big|_{\substack{U_2=Z_{k1} \\ -I_2}} \Rightarrow$$

$$Z_{k1} = \frac{(A_{11} - A_{22}) \pm \sqrt{(A_{11} - A_{22})^2 + 4A_{12}A_{21}}}{2A_{21}} \tag{3.188}$$

analog

$$Z_{k2} = \frac{(A_{22} - A_{11}) \pm \sqrt{(A_{22} - A_{11})^2 + 4A_{12}A_{21}}}{2A_{21}} \tag{3.189}$$

Observație:

➤ Semnul din fața radicalului se alege astfel încât să corespundă sensului fizic al parametrilor: $Z_{k1}, Z_{k2} > 0$;

➤ Pentru exprimarea exponentului de transfer pe imagine (reamintim pentru cazul diporților reciproci) funcție de parametrii fundamentali rezultă că:

$$g_k = \ln \left(\frac{I_1}{I_2} \right) \stackrel{(3.28)}{=} \ln \left(-A_{21} \frac{U_2}{I_2} + A_{22} \right) = \ln(A_{21}Z_{k2} + A_{22}) \stackrel{(3.189)}{\Rightarrow}$$

$$g_k = \ln \left(\frac{(A_{22} + A_{11}) \pm \sqrt{(A_{22} - A_{11})^2 + 4A_{12}A_{21}}}{2} \right) \Rightarrow$$

$$g_k = \ln \left(\frac{(A_{22} + A_{11}) \pm \sqrt{A_{11}^2 + A_{22}^2 + 2A_{11}A_{22} - 4A_{11}A_{22} + 4A_{12}A_{21}}}{2} \right) \Rightarrow$$

$$g_k = \ln \left(\frac{(A_{22} + A_{11}) \pm \sqrt{(A_{22} + A_{11})^2 - 4\Delta A}}{2} \right) \stackrel{(3.41)}{\Rightarrow} \Delta A = 1$$

$$g_k = \ln \left(\frac{(A_{22} + A_{11}) \pm \sqrt{\left(\frac{A_{22} + A_{11}}{2}\right)^2 - 1}}{2} \right) \quad (3.190)$$

3.6. Parametrii de lucru ai diporților

În sistemele de telecomunicații, circuitele diport sunt închise la cele două porți pe terminale neideale. În figura 3.55 este prezentat un diport conectat între o sursă de semnal și o impedanță oarecare Z_s . În acest caz este foarte important să se determine impedanța de intrare în diport și să se evalueze funcția de transfer de la generator la sarcină.

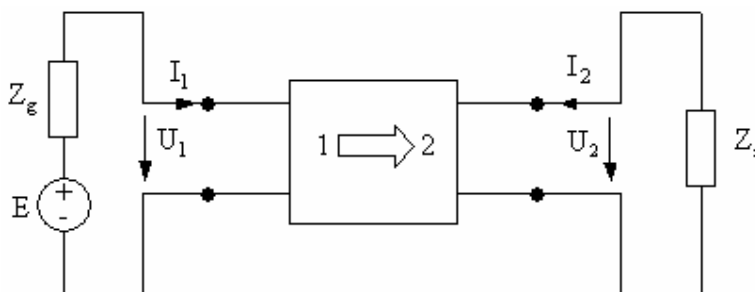


Fig. 3.55. Diportul funcționând în condiții reale de lucru

3.6.1. Impedanța de intrare

Impedanța de intrare la o poartă depinde de diport (de parametrii acestuia) și de impedanța care este conectată la cealaltă poartă, numită impedanță de terminasie sau de sarcină.

Determinarea impedanței de intrare Z_{in} este importantă, deoarece aceasta reprezintă sarcina generatorului de semnal.

Fie diportul din figura 3.56.

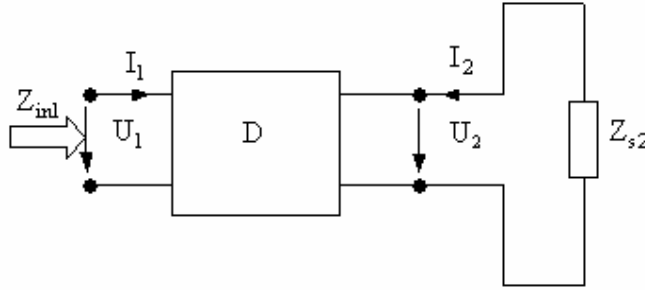


Fig. 3.56. Diport terminat pe Z_{s2}

a) Exprimarea impedanței de intrare funcție de parametrii diportului.

Impedanța de intrare la poarta 1, Z_{in1} poate fi exprimată în funcție de un set de parametri ai diportului (de exemplu prin parametrii de impedanță) și de impedanța de sarcină Z_{s2} de la poarta 2.

Conform figurii 3.56, se poate scrie că:

$$Z_{in1} = \frac{U_1}{I_1}; Z_{s1} = \frac{U_2}{-I_2} \quad (3.191)$$

Conform sistemul de ecuații (3.3) atașat parametrilor impedanță, se poate scrie că:

$$\begin{cases} U_1 = z_{11}I_1 + z_{12}I_2 \\ U_2 = z_{21}I_1 + z_{22}I_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{U_1}{I_1} = z_{11} + z_{12} \frac{I_2}{I_1} \\ U_2 = z_{21}I_1 + z_{22}I_2 \end{cases} \stackrel{(3.191)}{\Rightarrow} \begin{cases} Z_{in1} = z_{11} + z_{12} \frac{I_2}{I_1} \\ -Z_{s2}I_2 = z_{21}I_1 + z_{22}I_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} Z_{in1} = z_{11} + z_{12} \frac{I_2}{I_1} \\ -Z_{s2} \frac{I_2}{I_1} = z_{21} + z_{22} \frac{I_2}{I_1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Z_{in1} = z_{11} + z_{12} \frac{I_2}{I_1} \\ \frac{I_2}{I_1} = -\frac{z_{21}}{z_{22} + Z_{s2}} \end{cases} \Rightarrow$$

$$Z_{in1} = z_{11} - \frac{z_{12}z_{21}}{z_{22} + Z_{s2}} = \frac{\Delta z + z_{11}Z_{s2}}{z_{22} + Z_{s2}} \quad (3.192)$$

Dacă diportul este terminat la poarta 1 cu o impedanță Z_{s1} , atunci impedanța de intrare la poarta 2, Z_{in2} poate fi exprimată printr-o relație similară:

$$Z_{in2} = z_{22} - \frac{z_{12}z_{21}}{z_{11} + Z_{s1}} = \frac{\Delta z + z_{11}Z_{s1}}{z_{11} + Z_{s1}} \quad (3.193)$$

Observație:

Pentru cele două cazuri limită ale impedanței de sarcină, se regăsesc expresiile impedanței de intrare, astfel:

➤ Lucrul în gol:

$$Z_{s2} = \infty \stackrel{(3.192)}{\Rightarrow} Z_{in1} = z_{11}; Z_{s1} = \infty \stackrel{(3.193)}{\Rightarrow} Z_{in2} = z_{22} \quad (3.194)$$

➤ Lucrul în scurtcircuit:

$$Z_{s2} = 0 \Rightarrow Z_{in1} = \frac{1}{y_{11}}; Z_{s1} = 0 \Rightarrow Z_{in2} = \frac{1}{y_{22}} \quad (3.195)$$

Utilizând relațiile dintre parametrii matriceali, vezi tabelul 3.2.1, impedanțele de intrare se pot exprima funcție de oricare familie de parametri matriceali. Această dependență este prezentată în tabelul 3.2.2.

Tabelul 3.2.2

Parametrii matriceali	Z_{in1} în funcție de Z_{s2} și parametrii matriceali	Z_{in2} în funcție de Z_{s1} și parametrii matriceali
Z	$\frac{\Delta z + z_{11}Z_{s2}}{z_{22} + Z_{s2}}$	$\frac{\Delta z + z_{11}Z_{s1}}{z_{11} + Z_{s1}}$
Y	$\frac{1 + y_{22}Z_{s2}}{y_{11} + \Delta y Z_{s2}}$	$\frac{1 + y_{11}Z_{s1}}{y_{22} + \Delta y Z_{s1}}$
A	$\frac{A_{12} + A_{11}Z_{s2}}{A_{22} + A_{21}Z_{s2}}$	$\frac{A_{12} + A_{22}Z_{s1}}{A_{11} + A_{21}Z_{s1}}$
h	$\frac{h_{11} + \Delta h Z_{s2}}{1 + h_{22}Z_{s2}}$	$\frac{h_{11} + Z_{s1}}{\Delta h + h_{22}Z_{s1}}$
B	$\frac{B_{12} + B_{22}Z_{s2}}{B_{11} + B_{21}Z_{s2}}$	$\frac{B_{12} + B_{11}Z_{s1}}{B_{22} + B_{21}Z_{s1}}$
g	$\frac{g_{22} + Z_{s2}}{\Delta g + g_{11}Z_{s2}}$	$\frac{g_{22} + \Delta g Z_{s1}}{1 + g_{11}Z_{s1}}$

b) Exprimarea impedanței de intrare funcție de parametrii imagine.

Aplicând (3.191) la (3.172) rezultă că:

$$Z_{in1} = \frac{U_1}{I_1} = \frac{U_2 \sqrt{\frac{Z_{01}}{Z_{02}}} \text{ch}g - I_2 \sqrt{Z_{01}Z_{02}} \text{sh}g}{U_2 \frac{\text{sh}g}{\sqrt{Z_{01}Z_{02}}} - I_2 \sqrt{\frac{Z_{02}}{Z_{01}}} \text{ch}g} = \frac{U_2 \sqrt{\frac{Z_{01}}{Z_{02}}} \text{ch}g - \sqrt{Z_{01}Z_{02}} \text{sh}g}{I_2 \sqrt{\frac{Z_{01}}{Z_{02}}} \text{ch}g - \sqrt{Z_{01}Z_{02}} \text{sh}g} \Rightarrow \quad (3.191)$$

$$Z_{in1} = Z_{01} \frac{Z_{s2} \text{ch}g + Z_{02} \text{sh}g}{Z_{s2} \text{sh}g + Z_{02} \text{ch}g} \quad (3.196)$$

Pentru a pune în evidență semnificațiile fizice ale impedanței de intrare, relația (3.191) poate avea următoarele forme:

1. Conform (3.173), $Z_{1sc} = Z_{01} \text{th}g$; $Z_{2sc} = Z_{02} \text{th}g$; $Z_{2g} = Z_{02} \text{cthg}$, se poate scrie că:

$$Z_{in1} = Z_{01} \frac{\text{ch}g}{\text{sh}g} \frac{Z_{s2} + Z_{02} \frac{\text{sh}g}{\text{ch}g}}{Z_{s2} + Z_{02} \frac{\text{ch}g}{\text{sh}g}} = Z_{01} \text{th}g \frac{Z_{s2} + Z_{02} \text{th}g}{Z_{s2} + Z_{02} \text{cthg}} \Rightarrow \quad (3.173)$$

$$Z_{in1} = Z_{1sc} \frac{Z_{s2} + Z_{2sc}}{Z_{s2} + Z_{2g}} \quad (3.197)$$

➤ Relația (3.197) este utilă atunci când s-au determinat inițial valorile impedanțelor de gol sau de scurtcircuit.

2. Se notează

$$\operatorname{th}(n_{02}) = \frac{Z_{s2}}{Z_{02}} \quad (3.198)$$

Cu această notație expresia impedanței de intrare devine:

$$Z_{in1} = Z_{01} \frac{Z_{s2} \operatorname{ch}g + Z_{02} \operatorname{sh}g}{Z_{s2} \operatorname{sh}g + Z_{02} \operatorname{ch}g} = Z_{01} \frac{\frac{Z_{s2}}{Z_{02}} \operatorname{ch}g + \operatorname{sh}g}{\frac{Z_{s2}}{Z_{02}} \operatorname{sh}g + \operatorname{ch}g} \stackrel{(3.198)}{=} Z_{01} \frac{\operatorname{th}(n_{02}) \operatorname{ch}g + \operatorname{sh}g}{\operatorname{th}(n_{02}) \operatorname{sh}g + \operatorname{ch}g} \Rightarrow$$

$$Z_{in1} = Z_{01} \operatorname{th}(n_{02} + g) \quad (3.199)$$

➤ Relația (3.198) este utilă pentru a pune în evidență condițiile în care impedanța de intrare este egală cu impedanța imagine, astfel:

- dacă există adaptare la poarta 2, $Z_{s2} = Z_{02} \Rightarrow Z_{in1} = Z_{01}$;
- dacă atenuarea este foarte mare, tinzând spre infinit,

$$a \rightarrow \infty \Rightarrow g \rightarrow \infty \Rightarrow \operatorname{th}(\infty) \rightarrow 1 \Rightarrow Z_{in1} = Z_{01}$$

3. Se notează cu ρ_{02} coeficientul de neadaptare la poarta 2 a diportului. Conform (3.141) coeficientul de neadaptare la o poartă are expresia:

$$\rho = \left(\frac{Z_S - Z_g}{Z_S + Z_g} \right),$$

unde:

Z_S este impedanța de sarcină “văzută” la poarta 2, adică $Z_S = Z_{s2}$;

Z_g este impedanța generatorului “văzută” la poarta 2 în cazul adaptării, adică

$$Z_g = Z_{02};$$

Conform acestor particularizări a impedanțelor expresia coeficientului de neadaptare la poarta 2 devine:

$$\rho_{02} = \left(\frac{Z_{s2} - Z_{02}}{Z_{s2} + Z_{02}} \right) \quad (3.200)$$

Raportul celor două impedanțe devine:

$$\frac{Z_{s2}}{Z_{02}} = \frac{1 + \rho_{02}}{1 - \rho_{02}}$$

Conform (3.196) se poate scrie că:

$$Z_{in1} = Z_{01} \frac{Z_{s2} \operatorname{ch}g + Z_{02} \operatorname{sh}g}{Z_{s2} \operatorname{sh}g + Z_{02} \operatorname{ch}g} = Z_{01} \frac{\frac{Z_{s2}}{Z_{02}} \operatorname{ch}g + \operatorname{sh}g}{\frac{Z_{s2}}{Z_{02}} \operatorname{sh}g + \operatorname{ch}g} \stackrel{(3.171)}{=} Z_{01} \frac{\frac{1 + \rho_{02}}{1 - \rho_{02}} \operatorname{ch}g + \operatorname{sh}g}{\frac{1 + \rho_{02}}{1 - \rho_{02}} \operatorname{sh}g + \operatorname{ch}g} \Rightarrow$$

$$Z_{in1} = Z_{01} \frac{e^g + \rho_{02} e^{-g}}{e^g - \rho_{02} e^{-g}} = Z_{01} \frac{1 + \rho_{02} e^{-2g}}{1 - \rho_{02} e^{-2g}} \quad (3.201)$$

➤ Relația (3.201) pune în evidență în ce măsură neadaptarea de la ieșire se transferă la intrare, astfel:

$$\rho_{01} = \left(\frac{Z_S - Z_g}{Z_S + Z_g} \right) = \left(\frac{Z_{in1} - Z_{01}}{Z_{01} + Z_{in1}} \right) \stackrel{(3.201)}{=} \frac{e^g + \rho_{02} e^{-g} - 1}{e^g - \rho_{02} e^{-g}} \Rightarrow$$

$$\rho_{01} = \frac{\rho_{02} e^{-g}}{e^g} = \rho_{02} e^{-2g} \quad (3.202)$$

adică, neadaptarea de la ieșire se resimte la intrare cu atât mai mult cu cât g (adică a) este mai mic.

3.6.2. Atenuarea compusă

Diporții pasivi funcționează în sistemele de telecomunicații mai ales între terminații rezistive, vezi figura 3.57.

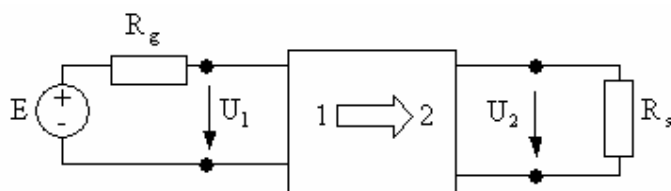


Fig. 3.57. Diportul închis pe terminații rezistive

În astfel de situații este important să se evalueze pierderea de putere la trecerea semnalelor prin diport. Funcția care caracterizează diportul în condiții de lucru din acest punct de vedere este atenuarea de lucru numită și atenuare compusă sau atenuare efectivă.

Pentru definirea pierderii de putere se raportează puterea aparentă primită de receptor $P_2 = |U_2 I_2|$ la o putere de referință măsurată în circuitul de referință, prezentat în figura 3.58, în care generatorul este adaptat.

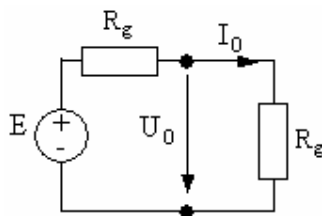


Fig. 3.58. Circuit de referință pentru atenuarea de lucru

Puterea de referință, P_0 se exprimă cu notațiile din figura 3.58, prin particularizarea relației (3.129), unde $Z_g = R_g$, obținându-se:

$$P_0 = |U_0 I_0| = \frac{E^2}{4R_g} \quad (3.203)$$

Puterea în sarcină, P_2 se exprimă cu notațiile din figura 3.57, având expresia:

$$P_2 = |U_2 I_2| = \frac{U_2^2}{R_s} \quad (3.204)$$

Prin definiție, atenuarea compusă a_c , poate avea următoarele expresii:

$$a_c = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{P_0}{P_2} \right) [\text{Np}] \quad (3.205)$$

$$a_c = 10 \lg \left(\frac{P_0}{P_2} \right) [\text{dB}] \quad (3.206)$$

Definiție:

➤ Atenuarea compusă (de lucru) a unui diport conectat între un generator, cu impedanță internă rezistivă, și o sarcină rezistivă este egală cu jumătate logaritmului natural al raportului dintre puterea maximă pe care o poate oferi generatorul și puterea obținută de la acel generator, în rezistența de sarcină, prin intermediul diportului.

Conform (3.203)... (3.206) expresia atenuării compuse poate avea expresiile:

$$a_c = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{E^2 R_s}{4U_2^2 R_g} \right| [\text{Np}] \quad (3.207)$$

$$a_c = 10 \lg \left| \frac{E^2 R_s}{4U_2^2 R_g} \right| [\text{dB}] \quad (3.208)$$

Observație:

➤ Atenuarea compusă poate fi extinsă și pentru cazul în care atât generatorul cât și sarcina au impedanțe complexe Z_g , respectiv Z_s . În acest caz P_0 și P_2 sunt puteri aparente.

La fel ca în cazul impedanței de intrare, pentru a pune în evidență semnificațiile fizice ale atenuării compuse, aceasta se exprimă în funcție de parametri imagine, astfel:

Tensiunile de la intrarea, respectiv ieșirea diportului au expresiile:

$$E = U_1 + I_1 R_g ; U_2 = -I_2 R_s \quad (3.209)$$

Ecuțiile fundamentale (3.172), scrise în cazul diporților pasivi devin:

$$\begin{cases} U_1 = U_2 \sqrt{\frac{R_{01}}{R_{02}}} \operatorname{ch} a - I_2 \sqrt{R_{01} R_{02}} \operatorname{sh} a \\ I_1 = U_2 \frac{\operatorname{sh} a}{\sqrt{R_{01} R_{02}}} - I_2 \sqrt{\frac{R_{02}}{R_{01}}} \operatorname{ch} a \end{cases} \quad (3.210)$$

Din (3.209) și (3.210), rezultă că expresia atenuării compuse are forma:

$$a_c = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{E^2 R_s}{-4 I_2^2 R_s^2 R_g} \right| \stackrel{(3.209)}{=} \ln \left| \frac{U_1 + I_1 R_g}{-2 I_2 \sqrt{R_s R_g}} \right| \stackrel{(3.210)}{\Rightarrow}$$

$$\begin{aligned}
 a_c &= \ln \left| \frac{U_2 \sqrt{\frac{R_{01}}{R_{02}}} \operatorname{ch} a - I_2 \sqrt{R_{01} R_{02}} \operatorname{sh} a + \left(U_2 \frac{\operatorname{sh} a}{\sqrt{R_{01} R_{02}}} - I_2 \sqrt{\frac{R_{02}}{R_{01}}} \operatorname{ch} a \right) R_g}{-2 I_2 \sqrt{R_s R_g}} \right| \Rightarrow \\
 a_c &= \ln \left| \frac{U_2 \sqrt{\frac{R_{01}}{R_{02}}} \operatorname{ch} a + \frac{R_g}{\sqrt{R_{01} R_{02}}} \operatorname{sh} a}{-I_2 \sqrt{R_s R_g}} + \frac{\sqrt{R_{01} R_{02}} \operatorname{sh} a + R_g \sqrt{\frac{R_{02}}{R_{01}}} \operatorname{ch} a}{2 \sqrt{R_s R_g}} \right| \quad (3.209) \Rightarrow \\
 a_c &= \ln R_s \left| \frac{\sqrt{\frac{R_{01}}{R_{02}}} \operatorname{ch} a + \frac{R_g}{\sqrt{R_{01} R_{02}}} \operatorname{sh} a}{2 \sqrt{R_s R_g}} + \frac{\sqrt{R_{01} R_{02}} \operatorname{sh} a + R_g \sqrt{\frac{R_{02}}{R_{01}}} \operatorname{ch} a}{2 \sqrt{R_s R_g}} \right| \Rightarrow \dots \\
 a_c &= \ln \left| \frac{R_g + R_{01}}{2 \sqrt{R_g R_{01}}} \frac{R_s + R_{02}}{2 \sqrt{R_s R_{02}}} e^a \left[1 - \frac{R_g - R_{01}}{R_g + R_{01}} \frac{R_s - R_{02}}{R_s + R_{02}} e^{-2a} \right] \right| \quad (3.211)
 \end{aligned}$$

Sau

$$a_c = a + \ln \left| \frac{R_g + R_{01}}{2 \sqrt{R_g R_{01}}} \right| + \ln \left| \frac{R_s + R_{02}}{2 \sqrt{R_s R_{02}}} \right| + \ln \left| \left[1 - \frac{R_g - R_{01}}{R_g + R_{01}} \frac{R_s - R_{02}}{R_s + R_{02}} e^{-2a} \right] \right| \quad (3.212)$$

Se identifică următorii termeni ce intră în componența atenuării compuse, astfel:

- a - atenuarea pe imagini;
- a_{r1}, a_{r2} - atenuări de reflexie la poarta 1, respectiv 2, ce au expresiile:

$$\begin{cases} a_{r1} = \ln \left| \frac{R_g + R_{01}}{2 \sqrt{R_g R_{01}}} \right| \\ a_{r2} = \ln \left| \frac{R_s + R_{02}}{2 \sqrt{R_s R_{02}}} \right| \end{cases} \quad (3.213)$$

Acești termeni evaluează, în domeniul frecvenței, pierderile de putere datorate reflexiilor la cele două porți. Atenuările de reflexie pot fi legate de coeficienții de transmisie, vezi (3.134), pentru cazul diportului pasiv, astfel:

$$t = \frac{2 \sqrt{Z_S Z_g}}{Z_S + Z_g} \Rightarrow \begin{cases} Z_S = R_{01} \\ \Rightarrow \\ Z_g = R_g \end{cases} t_1 = \frac{2 \sqrt{R_g R_{01}}}{R_g + R_{01}} \quad (3.214)$$

$$\begin{cases} Z_S = R_s \\ \Rightarrow \\ Z_g = R_{02} \end{cases} t_2 = \frac{2 \sqrt{R_s R_{02}}}{R_s + R_{02}}$$

Legătura dintre atenuările de reflexie și coeficienții de transmisie este următoarea:

$$\begin{cases} a_{r1} = \ln \left| \frac{1}{t_1} \right| \\ a_{r2} = \ln \left| \frac{1}{t_2} \right| \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} t_1 = \frac{1}{e^{a_{r1}}} \\ t_2 = \frac{1}{e^{a_{r2}}} \end{cases} \quad (3.215)$$

➤ ρ_{01}, ρ_{02} - coeficienți de neadaptare la poarta 1, respectiv 2.

Conform (3.141) coeficienții de neadaptare de la cele două porți au expresiile:

$$\rho = \frac{Z_S - Z_g}{Z_S + Z_g} \Rightarrow \begin{cases} Z_S = R_{01} \\ Z_g = R_g \end{cases} \Rightarrow \rho_{01} = \frac{R_g - R_{01}}{R_g + R_{01}} \quad (3.216)$$

$$\rho = \frac{Z_S - Z_g}{Z_S + Z_g} \Rightarrow \begin{cases} Z_S = R_s \\ Z_g = R_{02} \end{cases} \Rightarrow \rho_{02} = \frac{R_s - R_{02}}{R_s + R_{02}}$$

În conformitate cu (3.213) și (3.216) expresia atenuării compuse devine:

$$a_c = a + a_{r1} + a_{r2} + \ln \left| \left[1 - \rho_{01} \rho_{02} e^{-2a} \right] \right| \quad (3.217)$$

Ultimul termen al atenuării compuse reprezintă pierderile de putere datorate reflexiilor multiple de la cele două porți, purtând numele de atenuare de interacțiune, ce este definită astfel:

$$a_{12} = \ln \left| \left[1 - \rho_{01} \rho_{02} e^{-2a} \right] \right| \quad (3.218)$$

În concluzie:

$$a_c = a + a_{r1} + a_{r2} + a_{12} \quad (3.219)$$

Observații:

➤ În cazul în care există adaptare la ambele porți ale diportului este firesc ca atenuarea compusă să fie egală cu atenuarea pe imagini a acestuia.

Conform (3.138) coeficientul de transmisie are valoare unitară, astfel încât:

$$t = 1 \stackrel{(3.214)}{\Rightarrow} t_1 = t_2 = 1 \stackrel{(3.215)}{\Rightarrow} a_{r1} = a_{r2} = 0 \quad (3.220)$$

Conform (3.142) coeficientul de neadaptare este nul, rezultând că:

$$\rho = 1 \stackrel{(3.216)}{\Rightarrow} \rho_{01} = \rho_{02} = 1 \stackrel{(3.218)}{\Rightarrow} a_{12} = 0 \quad (3.221)$$

În consecință

$$a_c = a \quad (3.222)$$

➤ Atenuarea compusă poate fi exprimată și în cazul în care atât generatorul cât și sarcina au impedanțe complexe Z_g , respectiv Z_s .

3.6.3. Atenuarea de inserție

Pierderea de putere printr-un diport pasiv în condiții de lucru se face prin intermediul atenuării de inserție, a_i .

Definirea atenuării de inserție, a_i , se face analog cu atenuarea compusă, a_c , cu deosebirea că în circuitul de referință, prezentat în figura 3.59, generatorul nu mai este adaptat cu sarcina.

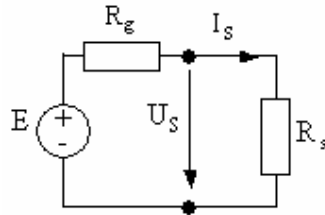


Fig. 3.59. Circuit de referință pentru atenuarea de inserție

Puterea de referință, S se exprimă cu notațiile din figura 3.59, expresia ei fiind dată de (3.128), adică:

$$S = E^2 \frac{R_s}{(R_s + R_g)^2}$$

Prin definiție, atenuarea de inserție a_i , poate avea următoarele expresii:

$$a_i = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{S}{P_2} \right) [\text{Np}] \quad (3.223)$$

$$a_i = 10 \lg \left(\frac{S}{P_2} \right) [\text{dB}] \quad (3.224)$$

unde $P_2 = |U_2 I_2|$ este puterea aparentă primită de receptor în cazul diportului din figura 3.57.

Definiție:

➤ Atenuarea de inserție a unui diport conectat între un generator, cu impedanță internă rezistivă, și o sarcină rezistivă este egală cu jumătate logaritmului natural al raportului dintre puterea debitată de generator direct în sarcină și puterea obținută de la același generator, în aceeași rezistență, prin intermediul diportului.

Conform (3.128) și (3.204) expresia atenuării de inserție poate avea expresiile:

$$a_i = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{E^2 R_s^2}{U_2^2 (R_s + R_g)^2} \right| = \ln \left(\left| \frac{E}{U_2} \right| \frac{R_s}{R_s + R_g} \right) [\text{Np}] \quad (3.225)$$

$$a_i = 10 \lg \left| \frac{E^2 R_s^2}{U_2^2 (R_s + R_g)^2} \right| = 20 \lg \left(\left| \frac{E}{U_2} \right| \frac{R_s}{R_s + R_g} \right) [\text{dB}] \quad (3.226)$$

Observație:

➤ Atenuarea de inserție poate fi extinsă și pentru cazul în care atât generatorul cât și sarcina au impedanțe complexe Z_g , respectiv Z_s .

➤ Legătura dintre atenuarea de inserție și cea compusă este următoarea:

Conform (3.207) și (3.225) rezultă că

$$a_i = a_c - \ln \left(\frac{R_s + R_g}{2\sqrt{R_s R_g}} \right) \quad (3.227)$$

Termenul $\ln \left(\frac{R_s + R_g}{2\sqrt{R_s R_g}} \right)$ este datorat diferențelor care apar în circuitele de referință

- ale atenuării compuse (figura 3.58) unde generatorul este adaptat cu sarcina;
- ale atenuării de inserție (figura 3.59) unde generatorul este neadaptat cu sarcina;

3.6.4. Exemple de calcul

În continuare se vor prezenta câteva exemple de calcul a parametrilor de lucru ai diporților.

1. Fie atenuatorul din figura 3.60. Să se determine atenuarea compusă și cea de inserție. Se cunoaște că: $E = 4V$; $U_2 = 100mV$; $Z_g = 300\Omega$; $Z_s = 600\Omega$.

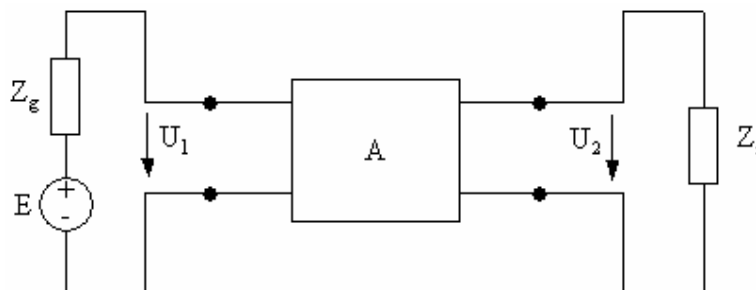


Fig. 3.60. Exemplu de atenuator

Conform (3.207) rezultă că:

$$a_c = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{E^2 R_s}{4U_2^2 R_g} \right| = \ln \left| \frac{E}{2U_2} \sqrt{\frac{R_s}{R_g}} \right| \approx 3.34 [\text{Np}]$$

Conform (3.225) rezultă că:

$$a_i = \ln \left(\left| \frac{E}{U_2} \right| \frac{R_s}{R_s + R_g} \right) \approx 3.283 [\text{Np}]$$

2. Fie diportul din figura 3.61. Să se determine atenuarea compusă și cea de inserție știind că frecvența de lucru este $\omega = 10^6 \text{ rad/s}$.

Se cunoaște că: $R = 1\text{k}\Omega$; $R_1 = 100\Omega$; $R_2 = 10\text{k}\Omega$; $C = 1\text{nF}$; $L = 1\text{mH}$.

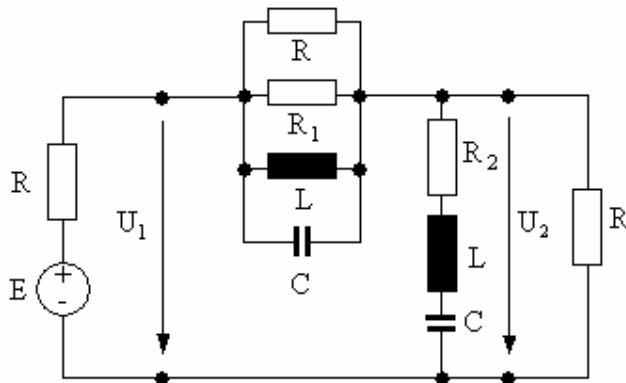


Fig. 3.61. Exemplu de diport

Pentru a calcula cele două atenuări trebuie determinată valoarea rezistenței de sarcină. Se observă că frecvența de lucru a diportului, $\omega_0 = 10^6 \text{ rad/s}$, este frecvența la care cele două circuit LC sunt la rezonanță, astfel:

➤ pentru circuitul derivație LC (situat paralel cu R ; R_1) $\omega_{0d} \approx \frac{1}{\sqrt{LC}} = 10^6 \text{ rad/s}$ și în consecință impedanța acestuia este infinită;

➤ pentru circuitul serie LC (situat în serie cu R_2) $\omega_{0s} = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 10^6 \text{ rad/s}$ și în consecință impedanța acestuia este infinită;

În concluzie, circuitul se poate remodela (doar dacă $\omega = 10^6 \text{ rad/s}$) ca în figura 3.62.

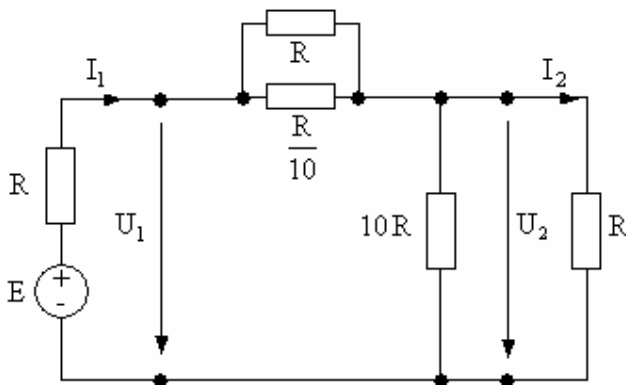


Fig. 3.62. Diportul din figura 3.61 lucrând la ω_0

Cum sarcina diportului (pe care debitează U_2) este identică cu cea a generatorului, rezultă că cele două atenuări sunt egale și în consecință conform (3.225) rezultă că:

$$a_c = a_i = \ln\left(\left|\frac{E}{U_2}\right|\frac{R_s}{R_s + R_g}\right) = \ln\left(\left|\frac{E}{U_2}\right|\frac{R}{R + R}\right) = \ln\left(\left|\frac{E}{2U_2}\right|\right) \quad (3.228)$$

Adaptând relația (3.126) la circuitul din figura 3.62 rezultă că:

$$\begin{cases} U_2 = I_2 R \\ E = I_1 R + U_1 \\ U_1 = I_1 R_i \end{cases} \quad (3.229)$$

Conform circuitul din figura 3.62 se observă că:

$$R_i = \frac{R \cdot \frac{R}{10}}{R + \frac{R}{10}} + \frac{10R \cdot R}{10R + R} = R \quad (3.230)$$

Din (3.229) și (3.230) rezultă că:

$$\begin{cases} U_2 = I_2 R \\ E = I_1 R + U_1 \\ U_1 = I_1 R \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U_2 = I_2 R \\ E = 2I_1 R \end{cases} \Rightarrow \frac{E}{U_2} = \frac{2I_1}{I_2} \quad (3.231)$$

Aplicând (3.231) la (3.228) se obține:

$$a_c = a_i = \ln\left(\left|\frac{I_1}{I_2}\right|\right)$$

Din studiul circuitului din figura 3.62 se obține că $11I_2 = 10I_1$, de unde rezultă că:

$$a_c = a_i = \ln\left(\left|\frac{11}{10}\right|\right) \approx 0.0953[\text{Np}] \quad (3.232)$$

3.7. Relații dintre diporți

Între diporți există relații de echivalență, de dualitate sau de complementaritate. Aceste relații simplifică analiza comportării acestora. În continuare se vor defini relații cu referire doar la doi diporți, cu observația că aceste pot fi generalizate la mai mulți diporți.

➤ **Echivalența diporților**

Doi diporți sunt echivalenți dacă, dacă setul de parametri care îi definește sunt identici.

Relația de echivalență permite să se aleagă schema cea mai avantajoasă în fiecare aplicație concretă, pornind de la o schemă ce poate fi calculată cât mai simplu. Echivalarea schemelor se face exprimând un set de de parametri prin elementele schemelor ce se echivalează și scriind egalitatea parametrilor corespunzători.

Exemplu:

Fie diporții din figura 3.63. Să se stabilească relațiile de echivalență dintre aceștia.

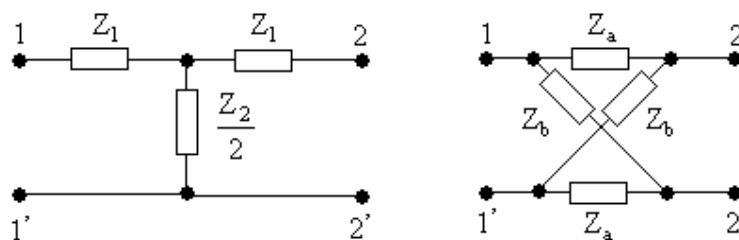


Fig. 3.63. Echivalența diportului în T cu cel în X

Matricile parametrilor impedanță pentru cei doi diporți au expresiile:

$$[Z]_T = \begin{bmatrix} Z_1 + \frac{Z_2}{2} & \frac{Z_2}{2} \\ \frac{Z_2}{2} & Z_1 + \frac{Z_2}{2} \end{bmatrix}$$

$$[Z]_X = \begin{bmatrix} Z_a + Z_b & Z_b - Z_a \\ Z_b - Z_a & Z_a + Z_b \end{bmatrix}$$

Egalând cele două matrici (condiția de echivalență), rezultă că:

- Pentru trecerea de la diportul în T la cel în X

$$Z_a = Z_1 ; Z_b = Z_1 + Z_2 \quad (3.233)$$

- Pentru trecerea de la diportul în X la cel în T

$$Z_1 = Z_a ; Z_2 = Z_b - Z_a \quad (3.234)$$

Se observă că această transformare nu este totdeauna posibilă. Dacă impedanțele schemelor sunt rezistențe și $R_a > R_b$ rezultă că $R_2 < 0$. Rezistența negativă nu se poate realiza cu elemente de circuite pasive.

► Dualitatea diporților

Doi diporți sunt duali dacă sunt definiți de familii de parametri duale.

Dualitatea a doi diporți D' și D'' poate fi exprimată prin:

- corespondența dintre matricea impedanță z' , respectiv admitanță y'' , astfel:

$$z' \Rightarrow y'' \quad (3.235)$$

- corespondența dintre parametrii imagine, astfel:

$$Z'_{01} \Rightarrow \frac{1}{Z''_{01}}; Z'_{02} \Rightarrow \frac{1}{Z''_{02}}; g' = g'' \quad (3.236)$$

În teoria circuitelor este utilizată în mod frecvent echivalența a doi diporți. O asemenea metodă se bazează pe teorema lui Bartlett (teorema bisecțiunii) care permite echivalența oricărui diport simetric cu o schemă în X.

Teorema bisecțiunii

Orice diport poate fi echivalat cu o schemă în X simetrică, la care impedanța serie este egală cu impedanța de scurtcircuit a jumătății diportului simetric, iar impedanța derivație este egală cu impedanța în gol a jumătății diportului simetric.

Conform notațiilor impedanțelor diportului în X din figura 3.63 se poate scrie că:

$$Z_a = Z'_{lsc}; Z_b = Z'_{lg} \quad (3.237)$$

unde Z'_{lsc} ; Z'_{lg} sunt impedanțele de scurtcircuit, respectiv de gol a jumătății diportului simetric ce urmează a fi echivalat.

Consecință:

Schema în X este cea mai generală schemă de diport simetric. Orice diport simetric poate fi reprezentat printr-un diport în X, pe când reciproca nu este adevărată (a se vedea relația (3.234) dedusă în exemplul anterior).

Exemplu

Să se găsească relațiile de trecere de la schema în T podit din figura 3.64 a) la schema în X echivalentă.

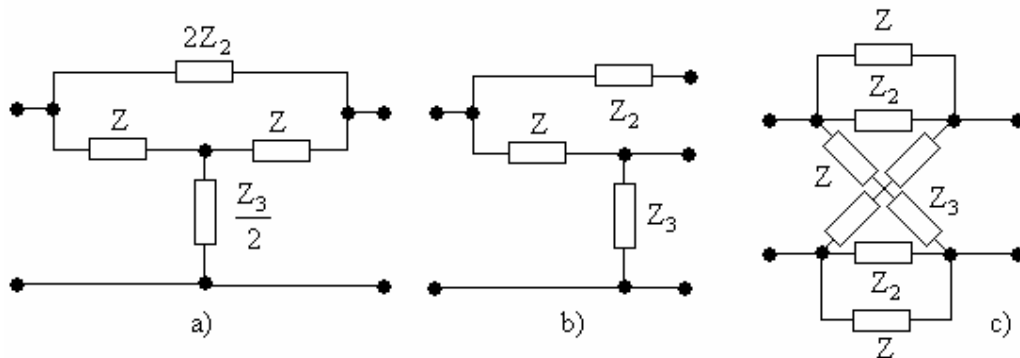


Fig. 3.64. Aplicarea teoremei bisecțiunii la diportul în T podit: a) Diport în T podit; b) Bisecțiunea T-ului podit; c) Diportul simetric în X echivalent cu diportul în T podit

Se aplică teorema bisecțiunii. În figura 3.64 b) se prezintă jumătatea schemei în T podit.

Se calculează impedanța de scurtcircuit respectiv, impedanța în gol a acestui diport, rezultând că:

$$\begin{cases} Z_{\text{isc}} = \frac{U_1}{I_1} \Big|_{U_2=0} = \frac{ZZ_2}{Z+Z_2} \\ Z_{\text{lg}} = \frac{U_1}{I_1} \Big|_{I_2=0} = Z+Z_3 \end{cases} \quad (3.238)$$

Conform teoremei bisecțiunii impedanțele schemei în X au următoarele valori:

$$\begin{cases} \frac{ZZ_2}{Z+Z_2} = Z_a \\ Z+Z_3 = Z_b \end{cases} \quad (3.239)$$

Schema în X este prezentată în figura 3.64 c).

3.8. Atenuatoare

Atenuatoarele sunt diporți rezistivi, care se introduc în lanțurile de transmisiuni fie pentru fixarea sau reglarea nivelului atenuării la valorile normate, fie pentru realizarea adaptării între două porți, evitând reflexiile cu prețul introducerii unor pierderi suplimentare.

Pentru atenuatoare este necesar să se cunoască legătura între elementele schemei și parametrii imagine ai acesteia, relații necesare pentru proiectare.

În tabelul 3.2.3 sunt prezentate expresiile parametrilor imagine funcție de elementele schemei pentru un număr de șapte atenuatoare.

Calculul parametrilor imagine pentru atenuatorul în Γ , figura 3.65.

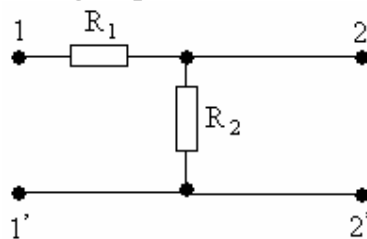


Fig. 3.65. Atenuator în Γ

Relațiile dintre parametrii imagine și elementele schemei se pot stabili:

- prin intermediul parametrilor fundamentali, astfel
 - se exprimă parametrii fundamentali funcție de elementele schemei (se utilizează (3.28) și relațiile matematice care descriu semnificațiile fizice ale parametrilor fundamentali);
 - se exprimă parametrii imagine funcție de elementele schemei prin intermediul parametrilor fundamentali determinați anterior, utilizând (3.164) și (3.165);
- prin intermediul parametrilor de gol și scurtcircuit, astfel
 - se exprimă parametrii de gol și scurtcircuit funcție de elementele schemei utilizând (3.173);
 - se exprimă parametrii imagine funcție de elementele schemei prin intermediul parametrilor de gol și scurtcircuit determinați anterior, utilizând (3.174) și (3.175);

Pentru rezolvarea acestei probleme se utilizează a doua variantă.
Aplicând (3.173) la schema din figura 3.65, rezultă că:

$$\begin{aligned} R_{1sc} &= \left. \frac{U_1}{I_1} \right|_{U_2=0} = R_1 \\ R_{2sc} &= \left. \frac{U_2}{I_2} \right|_{U_1=0} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \\ R_{1g} &= \left. \frac{U_1}{I_1} \right|_{I_2=0} = R_1 + R_2 \\ R_{2g} &= \left. \frac{U_2}{I_2} \right|_{I_1=0} = R_2 \end{aligned} \quad (3.240)$$

Conform (3.174) și (3.175) se obține:

$$\begin{cases} R_{01} = \sqrt{R_{1sc} R_{1g}} = \sqrt{R_1 (R_1 + R_2)} \\ R_{02} = \sqrt{R_{2sc} R_{2g}} = R_2 \sqrt{\frac{R_1}{R_1 + R_2}} \\ \text{tha} = \sqrt{\frac{R_{1sc}}{R_{1g}}} = \sqrt{\frac{R_{2sc}}{R_{2g}}} = \sqrt{\frac{R_1}{R_1 + R_2}} \end{cases} \quad (3.241)$$

Observație:

➤ Atenuatorul în Γ fiind constituit doar din două elemente (doi uniporturi) între parametrii imagine trebuie să existe o relație independentă de parametrii diportului. Din (3.241) rezultă că:

$$\text{tha} = \sqrt{1 - \frac{R_{02}}{R_{01}}} \text{ sau } \text{cha} = \sqrt{\frac{R_{01}}{R_{02}}} \quad (3.242)$$

➤ La un atenuator Γ nu pot fi impuși (date de intrare) decât doi parametrii imagine.

Proiectarea atenuatoarelor constă în determinarea rezistențelor din schemă, având date impedanțele imagine și atenuarea. În tabelul 3.2.3 sunt indicate relațiile de proiectare pentru șapte scheme uzuale de atenuatoare.

În continuare se prezintă ca exemplu modalitatea de **proiectare a atenuatorului nesimetric în Π** , figura 3.66.

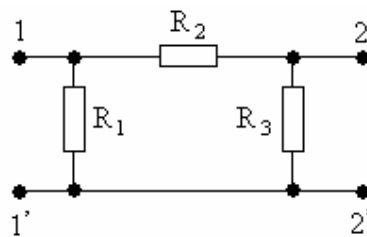


Fig. 3.66. Atenuator nesimetric în Π

- prin intermediul parametrilor fundamentali, astfel:
 - se exprimă parametrii fundamentali funcție de elementele schemei;
 - se exprimă parametrii imagine funcție de elementele schemei prin intermediul parametrilor fundamentali determinați anterior;
 - din sistemul de ecuații obținut se determină elementele schemei funcție de parametrii imagine;
- prin intermediul parametrilor de gol și scurtcircuit, astfel:
 - se exprimă parametrii de gol și scurtcircuit funcție de elementele schemei;
 - se exprimă parametrii imagine funcție de elementele schemei prin intermediul parametrilor de gol și scurtcircuit determinați anterior;
 - din sistemul de ecuații obținut se determină elementele schemei funcție de parametrii imagine;

1. Calculul parametrilor atenuatorului

1.1. Calculul parametrilor fundamentali

Varianta I

Sistemul de ecuații rezultat în urma aplicării teoremelelor lui Kirchhoff pe circuit ce trebuie proiectat, se compară cu sistemul de ecuații (3.28) ce definește parametrii fundamentali ai atenuatorului. Prin identificare se determină expresiile parametrilor fundamentali.

În urma scrierii teoremelor lui Kirchhoff pentru atenuatorul nesimetric în Π și a prelucrării (destul de laborioase) a lor, rezultă că:

$$\begin{cases} U_1 = \left(1 + \frac{R_2}{R_3}\right)U_2 - R_2 I_2 \\ I_1 = \left(\frac{1}{R_3} + \frac{R_2}{R_1 R_3} + \frac{1}{R_1}\right)U_2 - \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)I_2 \end{cases} \quad (3.243)$$

Prin identificarea coeficienților sistemului (3.243) cu ecuațiile (3.28) ce definesc din punct de vedere al parametrilor fundamentali atenuatorul, adică,

$$\begin{cases} U_1 = A_{11}U_2 - A_{12}I_2 \\ I_1 = A_{21}U_2 - A_{22}I_2 \end{cases} ,$$

rezultă că:

$$\mathbf{A}_{\Pi \text{ nesimetric}} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{R_2}{R_3} & R_2 \\ \frac{R_1 + R_2 + R_3}{R_1 R_3} & 1 + \frac{R_2}{R_1} \end{bmatrix} \quad (3.244)$$

Varianta II

Se exprimă parametrii fundamentali funcție de elementele atenuatorului utilizând (3.28) și relațiile matematice care descriu semnificațiile fizice ale acestora. Pentru determinarea fiecărui parametru, se particularizează schema (în scurt sau gol), obținându-se (fișec) aceleași expresii ca în (3.244):

$$\begin{aligned}
 A_{11 \Pi \text{ nesimetric}} &= \left. \frac{U_1}{U_2} \right|_{I_2=0} = \frac{R_2 + R_3}{R_3}, \\
 A_{12 \Pi \text{ nesimetric}} &= - \left. \frac{U_1}{I_2} \right|_{U_2=0} = R_2 \\
 A_{21 \Pi \text{ nesimetric}} &= \left. \frac{I_1}{U_2} \right|_{I_2=0} = \frac{R_1 + R_2 + R_3}{R_1 R_3} \\
 A_{22 \Pi \text{ nesimetric}} &= - \left. \frac{I_1}{I_2} \right|_{U_2=0} = \frac{R_1 + R_2}{R_1}
 \end{aligned}$$

Varianta III

Se exprimă parametrii fundamentali ai atenuatorului considerându-l ca pe un lanț de diporți conectați în cascadă.

Conform (3.72), (3.80) și (3.121) rezultă că:

$$\mathbf{A}_{\Pi \text{ nesimetric}} = \mathbf{A}_P \mathbf{A}_S \mathbf{A}_P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{R_1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & R_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{R_3} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{R_2}{R_3} & R_2 \\ \frac{R_1 + R_2 + R_3}{R_1 R_3} & 1 + \frac{R_2}{R_1} \end{bmatrix}$$

Observație:

➤ În funcție de complexitatea schemei de proiectat și a calculelor se alege una din variantele de calcul a parametrilor fundamentali.

1.2. Calculul parametrilor de gol și scurtcircuit

Aplicând (3.173) la schema din figura 3.66, rezultă că:

$$\begin{aligned}
 R_{1sc} &= \left. \frac{U_1}{I_1} \right|_{U_2=0} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \\
 R_{2sc} &= \left. \frac{U_2}{I_2} \right|_{U_1=0} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} \\
 R_{1g} &= \left. \frac{U_1}{I_1} \right|_{I_2=0} = \frac{R_1 (R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} \\
 R_{2g} &= \left. \frac{U_2}{I_2} \right|_{I_1=0} = \frac{R_3 (R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + R_3}
 \end{aligned} \tag{3.245}$$

2. Expresiile parametrilor imagine

2.1. Expresiile parametrilor imagine funcție de elementele schemei (prin intermediul parametrilor fundamentali)

Aplicând (3.166) și (3.169) la expresiile (3.244) rezultă că:

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{01} = R_1 \sqrt{\frac{R_2(R_2 + R_3)}{(R_1 + R_2)(R_1 + R_2 + R_3)}} \\ R_{02} = R_3 \sqrt{\frac{R_2(R_1 + R_2)}{(R_2 + R_3)(R_1 + R_2 + R_3)}} \\ a = \ln \left(\sqrt{\frac{(R_2 + R_3)(R_1 + R_2)}{R_1 R_3}} + \sqrt{\frac{R_2(R_1 + R_2 + R_3)}{R_1 R_3}} \right) \end{array} \right. \quad (3.246)$$

2.2. Expresiile parametrilor imagine funcție de elementele schemei (prin intermediul parametrilor de gol și scurtcircuit)

Aplicând (3.174) și (3.175) la expresiile (3.244) rezultă că:

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{01} = R_1 \sqrt{\frac{R_2(R_2 + R_3)}{(R_1 + R_2)(R_1 + R_2 + R_3)}} \\ R_{02} = R_3 \sqrt{\frac{R_2(R_1 + R_2)}{(R_2 + R_3)(R_1 + R_2 + R_3)}} \\ \text{tha} = \sqrt{\frac{R_2(R_1 + R_2 + R_3)}{(R_1 + R_2)(R_2 + R_3)}} \end{array} \right. \quad (3.247)$$

3. Proiectarea efectivă

Pentru determinarea expresiilor valorilor pieselor ce compun atenuatorul, funcție de parametrii imagine se alege spre rezolvare unul din sistemele de ecuații (3.246) sau (3.247).

Expresiile celor trei rezistoare, ce intră în componența atenuatorului nesimetric în Π sunt următoarele:

$$\begin{cases} R_1 = R_{01} \frac{\sqrt{R_{02}} \operatorname{sha}}{\sqrt{R_{02}} \operatorname{cha} - \sqrt{R_{01}}} \\ R_2 = \sqrt{R_{01} R_{02}} \operatorname{sha} \\ R_3 = R_{02} \frac{\sqrt{R_{01}} \operatorname{sha}}{\sqrt{R_{01}} \operatorname{cha} - \sqrt{R_{02}}} \end{cases} \quad (3.248)$$

Conform (3.248) se observă că nu pentru oricare valori ale parametrilor imagine poate exista un atenuator nesimetric în Π .

Pentru că valorile rezistențelor trebuie să fie pozitive este necesar ca la proiectare să se impună condiția:

$$\operatorname{cha} > \sqrt{\frac{R_{01}}{R_{02}}} \quad (3.249)$$

Tabelul 3.2.3

Schemă	Date de intrare	Relații de proiectare
Atenuator nesimetric în Γ	$R_{01}; R_{02}$, cu condiția $R_{01} > R_{02}$	$R_1 = \sqrt{R_{01}(R_{01} - R_{02})}$; $R_2 = R_{02} \sqrt{\frac{R_{01}}{R_{01} - R_{02}}}$
	$R_{01}; a$	$R_1 = R_{01} \operatorname{th} a$; $R_2 = \frac{2R_{01}}{\operatorname{sh} 2a}$
	$R_{02}; a$	$R_1 = \frac{R_{02}}{2} \operatorname{sh} 2a$; $R_2 = R_{02} \operatorname{cth} a$
Atenuator nesimetric în T	$R_{01}; R_{02}; a$, cu condiția $\operatorname{cha} \geq \sqrt{\frac{R_{01}}{R_{02}}}$	$R_1 = \sqrt{R_{01}} \frac{\sqrt{R_{01}} \operatorname{cha} - \sqrt{R_{02}}}{\operatorname{sha}}$; $R_2 = \frac{\sqrt{R_{01}R_{02}}}{\operatorname{cha}}$; $R_3 = \sqrt{R_{02}} \frac{\sqrt{R_{02}} \operatorname{cha} - \sqrt{R_{01}}}{\operatorname{sha}}$
Atenuator simetric în T	$R_{01} = R_{02} = R$; a	$R_1 = R \operatorname{th} \frac{a}{2}$; $R_2 = \frac{2R}{\operatorname{sha}}$
Atenuator nesimetric în Π	$R_{01}; R_{02}; a$, cu condiția $\operatorname{cha} \geq \sqrt{\frac{R_{01}}{R_{02}}}$	$R_1 = R_{01} \frac{\sqrt{R_{02}} \operatorname{sha}}{\sqrt{R_{02}} \operatorname{cha} - \sqrt{R_{01}}}$; $R_2 = \sqrt{R_{01}R_{02}} \operatorname{sha}$; $R_3 = R_{02} \frac{\sqrt{R_{01}} \operatorname{sha}}{\sqrt{R_{01}} \operatorname{cha} - \sqrt{R_{02}}}$
Atenuator simetric în Π	$R_{01} = R_{02} = R$; a	$R_1 = \frac{R}{2} \operatorname{sha}$; $R_2 = R \operatorname{cth} \frac{a}{2}$
Atenuator TP simetric	$R_{01} = R_{02} = R$; a	$R_1 = R(e^a - 1)$; $R_2 = \frac{R}{(e^a - 1)}$
Atenuator simetric în X	$R_{01} = R_{02} = R$; a	$R_a = R \operatorname{cth} \frac{a}{2}$; $R_b = R \operatorname{th} \frac{a}{2}$

4. CIRCUITE OSCILANTE

4.1 Oscilații libere

4.1.1. Generalități

Procesele oscilante se întâlnesc într-o măsură mai mare sau mai mică în orice domeniu al tehnicii. În radiocomunicații ele constituie procesele de bază. Oscilațiile electrice se obțin cu ajutorul circuitului oscilant. Înainte de a trece la studiul oscilațiilor electrice se reamintesc pe scurt câteva noțiuni generale referitoare la oscilații.

➤ Sisteme ideale

Se admite, pentru simplificarea studiului că se analizează sisteme ideale (lipsite de pierderi), care conservă energia. Într-un sistem conservativ energia rămâne constantă în timpul oscilațiilor, suferind doar o transformare continuă dintr-o formă în alta. La baza producerii oscilațiilor libere stau următoarele legi:

- legea variației continue a energiei, după care energia potențială W_p se transformă (în mod) continuu în energie cinetică W_c și invers;
- legea conservării energiei, $W_p + W_c = \text{const.}$, valabilă în orice moment al procesului oscilatoriu;

Sistemul oscilant va fi alcătuit din elemente capabile să acumuleze și să restituie energie, schimbând-o între ele pe rând.

➤ Sisteme reale

Sistemele reale diferă de cele ideale prin pierderile inerente de energie. Cu fiecare oscilație rezerva inițială de energie a sistemului scade, amplitudinile oscilațiilor se micșorează treptat după o lege exponențială. Asemenea oscilații se numesc amortizate ele având un caracter pseudoperiodic.

4.1.2. Oscilațiile circuitului electric ideal

Pentru ca un sistem electric să poată oscila el trebuie să conțină cele două elemente capabile să acumuleze energie sub cele două forme:

- energie (electro)potențială W_p , sub formă electrostatică, înmagazinată în câmpul electric W_e al unui condensator C;
- energie (electro)cinetică W_c , sub formă electrodinamică, înmagazinată în câmpul magnetic W_m al unei bobine L;

Schimbul energetic continuu între cele două elemente reactive constituie procesul oscilatoriu din sistemul L, C. În figura 4.1. este reprezentat un circuit R, L, C. Pentru cazul circuitului ideal se va considera că $R=0$.

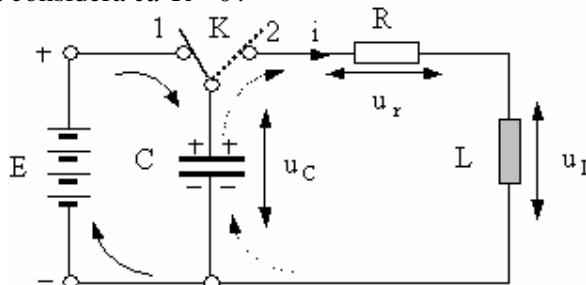


Fig.4.1. Circuitul oscilant R, L, C

- Etapa preliminară: $K \rightarrow 1$

Comutatorul fiind pe poziția 1, condensatorul este pe post de receptor, încărcându-se de la sursa E , de c.c. Acesta se va încărca până când tensiunea la bornele lui va atinge valoarea $U_0 \cong E$, cedându-i o cantitate de energie egală cu:

$$W_e = \frac{1}{2} C U_0^2 \quad (4.1)$$

pe care condensatorul o acumulează în câmpul lui electric.

- Circuitul oscilant propriu-zis: $K \rightarrow 2$

Prin trecerea comutatorului pe poziția 2, condensatorul se va descărca prin bobina L și prin rezistorul R a cărui valoare este mică – de ordinul câtorva ohmi sau zeci de ohmi (se reamintește că în acest caz se neglijează valoarea rezistorului).

Pe parcursul funcționării circuitului se evidențiază două etape distincte, una în care condensatorul este generator de tensiune, bobina jucând rolul de receptor, respectiv bobina generator de tensiune, rolul receptorului fiind jucat de condensator

4.1.2.1. Descărcarea condensatorului

Se urmărește procesul de descărcare al condensatorului, fără a ține seama de pierderile energetice care au loc în rezistența ohmică a circuitului.

Descărcarea condensatorului prin bobină duce la apariția, în circuitul exterior, a unui curent electric i , vezi figura 4.1. Apariția curentului este însoțită de câmpul magnetic al acestuia, deci de un flux magnetic prin bobina L . Odată cu fluxul magnetic ia naștere în bobină o t.e.m. de autoinducție care tinde să se opună creșterii curentului prin circuit. Din cauza opoziției t.e.m. de autoinducție curentul nu poate atinge instantaneu valoarea sa maximă, el variind (crescând) treptat.

Pentru a pune în evidență viteza de variație a curentului prin circuit se aplică a două teoremă a lui Kirchoff. În orice moment se poate scrie că:

$$u_C + e_L = 0 \quad (4.2)$$

$$\text{Dar cum } e_L = -L \frac{di}{dt} \quad (4.3)$$

Rezultă că:

$$u_C = -e_L = L \frac{di}{dt} \quad (4.4)$$

de unde de obține viteza de variație a curentului prin circuit

$$\frac{di}{dt} = \frac{1}{L} u_C \quad (4.5)$$

Observații:

- Viteza de variație (creștere) a curentului prin circuit depinde de caracteristicile constructive ale bobinei, variind invers proporțional cu valoarea inductanței, astfel:

$$L \uparrow \Rightarrow \frac{di}{dt} \downarrow ; L \downarrow \Rightarrow \frac{di}{dt} \uparrow \quad (4.6)$$

- Viteza de variație (creștere) a curentului prin circuit nu este constantă. Deoarece u_C este valoarea instantanee a tensiunii de la bornele condensatorului, viteza de creștere (panta) a curentului scade pe măsura descărcării condensatorului. Viteza de creștere a curentului este maximă în momentul inițial (când valoarea tensiunii pe condensator este maximă).

Curentul prin circuit atinge valoarea maximă $i = I_{MAX}$ în momentul în care condensatorul este descărcat $u_C = 0$, deoarece $\frac{di}{dt} = 0$.

Pentru o înțelegere completă a fenomenelor ce au loc, se explică funcționarea circuitului din punct de vedere energetic.

Crearea câmpului magnetic presupune înmagazinarea unei energii în acest câmp, transferată evident din rezerva inițială de energie a câmpului electric. Agentul care mijlocește transferul energiei din condensator în bobină, efectuând totodată și transformarea ei din potențială $w_e = w_p$ în cinetică $w_m = w_c$, este curentul electric. Pe măsură ce condensatorul se descarcă sarcina q scade iar odată cu ea scade și diferența de potențial dintre armăturile lui.

Relația:

$$w_e = \frac{1}{2} C u_C^2 \quad (4.7)$$

valabilă și pentru valorile instantanee ale tensiunii și energiei, arată că odată cu u_C scade și energia câmpului electric w_e . În baza principiului conservării energiei și a ipotezei admise ($R=0$) energia câmpului electric se transformă în energie de câmp magnetic, suma lor fiind constantă.

$$w_{total} = w_e + w_m = w_p + w_c = const. \quad (4.8)$$

➤ Starea sistemului la momentul inițial (condensatorul începe să se descarce)

Energia întregului sistem (L, C) este concentrată în câmpul electrostatic al condensatorului, valoarea curentului prin circuit fiind nulă.

$$i = 0; w_m = w_c = 0; w_{total} = w_e = W_e = \frac{1}{2} C U_0^2 \quad (4.9)$$

➤ Starea sistemului la momentul final (condensatorul este complet descărcat)

Întreaga rezervă de energie potențială, cedată inițial condensatorului, fiind epuizată, s-a transformat în energie cinetică. Energia întregului sistem (L, C) este concentrată în câmpul magnetic al bobinei, valoarea curentului prin circuit fiind maximă.

$$i = I_{MAX}; w_e = w_p = 0; w_{total} = w_m = W_m = \frac{1}{2} L I_{MAX}^2 \quad (4.10)$$

Din (4.8), (4.9) și (4.10) se obține expresia valorii maxime a curentului prin circuit, astfel:

$$I_{MAX} = \frac{U_0}{\sqrt{\frac{L}{C}}} = \frac{U_0}{Z_C} \quad (4.11)$$

unde

$$Z_C = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (4.12)$$

este impedanța caracteristică a circuitului L, C .

➤ Starea sistemului într-un moment intermediar al descărcării condensatorului prin bobină

$$w_{total} = w_e + w_m = w_p + w_c = \frac{1}{2} C u_C^2 + \frac{1}{2} L i^2 = \frac{1}{2} C U_{MAX}^2 = \frac{1}{2} L I_{MAX}^2 \quad (4.13)$$

4.1.2.2. Reîncărcarea condensatorului

Din acest moment curentul începe să scadă. Descreșterea lui dezvoltă iarăși în bobină o t.e.m. de autoinducție, care acum tinde să-l întrețină. Din această cauză curentul nu descrește brusc ci treptat, continuând să circule un timp în același sens. Curentul continuă să circule datorită rezervei de energie a câmpului magnetic din bobină. Aceasta fiind în descreștere rezultă în bobină t.e.m. de autoinducție care menține curentul în circuit.

T.e.m. de autoinducție acționează de această dată în sensul curentului ca o sursă de tensiune. Continuarea curgerii curentului în același sens, după descărcarea condensatorului, îl reîncarcă pe acesta cu polaritate inversă. În acest caz bobina joacă rolul de generator, iar condensatorul pe acela de receptor.

Observații

➤ Condensatorul se reîncarcă la aceeași valoare a tensiunii, polaritatea armăturilor fiind inversată față de momentul inițial (analiza funcționării a început în momentul în care comutatorul K a trecut pe poziția 2).

➤ Durata de reîncărcare a condensatorului este aceeași ca în cazul descărcării, deoarece parametrii circuitului (L,C) nu se modifică, iar pierderile sunt nule ($r=0$).

➤ Energia câmpului magnetic depinzând de valoarea instantanee a curentului din bobină, va scădea odată cu intensitatea curentului, transferându-se în câmpul electric al condensatorului. Când toată energia câmpului magnetic (energie electrocinetică) s-a epuizat, iar intensitatea curentului este zero, energia totală a sistemului este din nou concentrată în câmpul electric al condensatorului (energie electropotențială).

$$i=0 ; w_m = w_c =0 ; w_{total} = w_e = W_e = \frac{1}{2} C U_0^2 ; u_C = -U_0 \quad (4.14)$$

Din acest moment în care $i=0$, iar $u_C = -U_0$ fenomenul se repetă în sens invers.

4.1.2.3. Caracterul oscilant al circuitului L, C

Schimbul de energie dintre condensator și bobină având loc în ambele sensuri și la intervale egale de timp, oferă procesului un caracter oscilant. Din această cauză circuitul L,C se numește circuit oscilant.

Oscilațiile de curent și de tensiune din circuitul L,C fiind produse doar de forțele (energiile) interne ale sistemului – fără nici o intervenție din exterior – se numesc oscilații libere sau naturale.

Variațiile curentului i , respectiv a tensiunilor pe condensator u_C și bobină u_L au un caracter sinusoidal.

Demonstrație:

Analiza circuitului se realizează pe schema din figura 4.2.

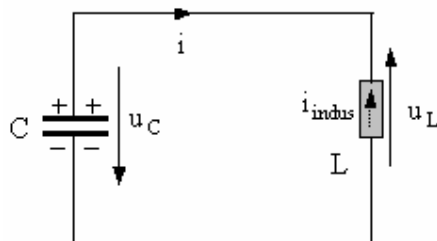


Fig.4.2. Circuitul oscilant ideal L, C

În momentul inițial condensatorul este încărcat la valoarea U_0 , iar curentul prin circuit este nul. Condițiile inițiale sunt:

$$\begin{cases} u_C(0) = U_0 \\ i(0) = 0 \end{cases} \quad (4.15)$$

În bobină apare fenomenul de autoinducție, care dă naștere unei tensiuni electromotoare, ce produce prin bobină un curent indus i_{indus} , care se opune variației curentului i . Se poate scrie că:

$$u_L = -L \frac{di}{dt}$$

Datorită faptului că în acest caz condensatorul se descarcă rezultă că:

$$i = -C \frac{du_C}{dt}$$

În concluzie ecuațiile ce descriu circuitul sunt:

$$\begin{cases} u_L = -L \frac{di}{dt} \\ u_C + u_L = 0 \\ i = -C \frac{du_C}{dt} \end{cases} \quad (4.16)$$

Din (4.16.) se obține o ecuație diferențială omogenă de ordinul doi de forma:

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \omega_0^2 u_C = 0 \quad (4.17)$$

unde s-a notat:

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \quad (4.18)$$

Ecuația caracteristică ecuației (4.17) are forma

$$r^2 + \omega_0^2 = 0 \text{ cu rădăcinile } r_{1,2} = \pm j\omega_0$$

Soluția generală a ecuației diferențiale este:

$$u_C(t) = A e^{\eta t} + B e^{\eta_2 t} = A e^{j\omega_0 t} + B e^{-j\omega_0 t} \quad (4.19)$$

Constantele A , B se determină din condițiile inițiale (4.15), rezultând sistemul:

$$\begin{cases} A + B = U_0 \\ C(j\omega_0 A - j\omega_0 B) = 0 \end{cases}$$

de unde rezultă că:

$$u_C(t) = \frac{U_0}{2} (e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}) = U_0 \cos(\omega_0 t) \quad (4.20)$$

iar

$$i(t) = \omega_0 C U_0 \sin(\omega_0 t) \quad (4.21)$$

și

$$u_L(t) = -L \frac{di(t)}{dt} = -LC \omega_0^2 U_0 \cos(\omega_0 t) = -U_0 \cos(\omega_0 t) = -u_C(t) \quad (4.22)$$

În concluzie, expresiile instantanee ale curentului și a tensiunilor din circuitul L, C sunt:

$$\begin{cases} i(t) = I_{\text{MAX}} \sin(\omega_0 t) \\ u_C(t) = U_{\text{MAX}} \cos(\omega_0 t) \\ u_L(t) = -U_{\text{MAX}} \cos(\omega_0 t) = -u_C(t) \end{cases} \quad (4.23)$$

unde s-a notat:

$$\begin{cases} U_{\text{MAX}} = U_0 \\ I_{\text{MAX}} = \omega_0 C U_0 = \frac{U_0}{X_C} \end{cases} \quad (4.24)$$

În figura 4.3 sunt reprezentate variațiile în timp (forme de undă) ale tensiunilor și curentului prin circuit pe durata unei perioade.

Fenomenele electrice și magnetice dintr-un circuit oscilant se desfășoară simultan și în strânsă interdependență, fără a putea fi separate unele de altele. De aceea oscilațiile dintr-un asemenea circuit se numesc electromagnetice.

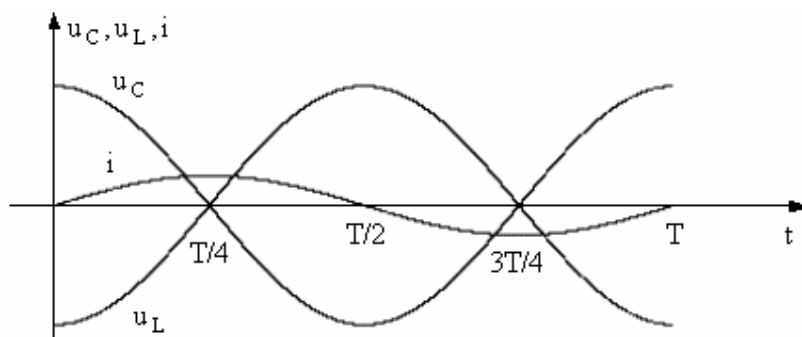


Fig.4.3. Variația în timp (forme de undă) a mărimilor u_L , u_C , i

Relația (4.18) nu este doar o notație, ea având – vezi (4.23) – și o interpretare fizică, reprezentând pulsația oscilațiilor libere.

Frecvența, respectiv perioada pulsațiilor libere sunt date de relațiile:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (4.25)$$

$$T_0 = \frac{1}{f_0} = 2\pi\sqrt{LC} \quad (4.26)$$

Relația (4.25) este cunoscută și sub numele de relația lui Thompson.

Concluzie:

➤ Frecvența oscilațiilor libere dintr-un circuit L,C, depinde doar de parametrii circuitului. Cu cât C și L au valori mai mari cu atât mai lent vor varia tensiunea, respectiv curentul prin circuit.

Observație:

➤ Relația (4.18) poate fi scrisă și sub forma:

$$L\omega_0 = \frac{1}{C\omega_0} \quad (4.27)$$

➤ Reactanțele elementelor din circuit L și C sunt egale la frecvența oscilațiilor libere.

4.1.3. Oscilațiile circuitului electric real

Pentru a analiza fenomenele ce apar într-un circuit real se ia în calcul influența rezistorului r .

Important:

➤ Într-un circuit oscilant acest rezistor nu există fizic, el apărând doar în schemele de analiză. El însumează pierderile din bobină și condensator.

4.1.3.1. Pierderile de energie dintr-o inductanță

Într-o bobină există întotdeauna pierderi de energie prin:

- efect Joule – Lenz, în rezistența activă a conductorului;
- histerezis în miezul magnetic (dacă există) al bobinei;
- curenții Foucault în ecrane și în piesele metalice din apropierea bobinei;
- radiație;

Fiecare gen de pierdere poate fi considerat ca datorându-se unei rezistențe echivalente, ce ar exista în circuitul bobinei și care ar disipa, prin încălzire, o energie echivalentă cu cea considerată. Rezistența echivalentă este o rezistență aparentă ce nu poate fi identificată în circuitul bobinei. Ea este corespondentul în calcule a pierderilor reale de energie. Suma tuturor acestor rezistențe aparente, echivalente diferitelor categorii de pierderi, constituie rezistența totală de pierderi, care este tot o rezistență aparentă.

Schema echivalentă (serie) a unei bobine cu pierderi este prezentată în figura 4.4, unde L este inductanța acesteia (bobină ideală).

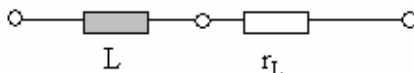


Fig.4.4. Schema echivalentă serie a unei bobine cu pierderi

Pierderile energetice dintr-o bobină nu se exprimă prin factorul de putere $\cos \varphi$, ci prin raportul dintre puterea reactivă și cea activă, evaluate în timp de o perioadă.

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{U_L}{U_r} = \frac{L \omega}{r_L} = Q_L \quad (4.28)$$

Relația (4.28) determină defazajul dintre tensiunea aplicată și curentul prin bobină, deci factorul de calitate - Q_L - al bobinei.

4.1.3.2. Pierderile de energie dintr-un condensator

Într-un condensator pierderile de energie au loc în principal în dielectric, prin:

- histerezis (datorită remanenței polarizării dielectricului);
- curentul de fugă (scăpări de curent) prin izolantul dintre armături;

Pierderile de energie având un caracter activ au ca efect mărirea rezistenței aparente a circuitului. Din această cauză defazajul dintre tensiunea de la bornele condensatorului și curentul care străbate condensatorul nu este de 90° , ci ceva mai mic.

$$\varphi^0 = 90^\circ - \delta^0 \quad (4.29)$$

În schema echivalentă acestea sunt înlocuite printr-o rezistență fictivă, situată fie în serie cu condensatorul, vezi figura 4.5a), fie în paralel cu acesta, vezi figura 4.5b). Condensatorul este considerat ideal, lipsit de orice pierderi, echivalentul acestora fiind r_{Cs} sau r_{Cp} .

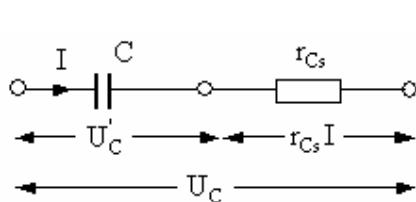


Fig. 4.5a) Schema echivalentă a condensatorului cu rezistența de pierderi serie și diagrama vectorială

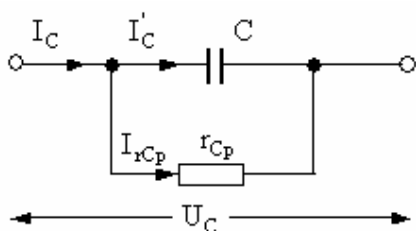
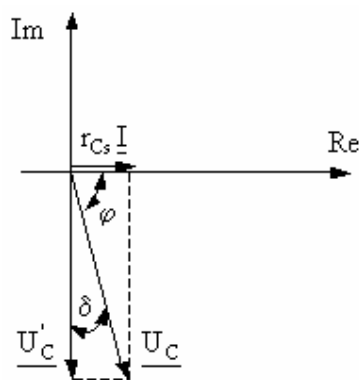
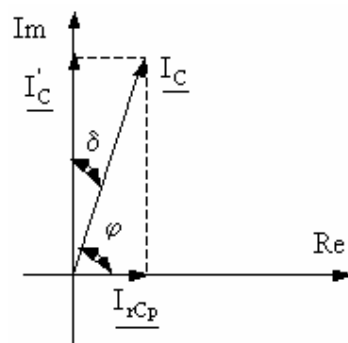


Fig. 4.5b) Schema echivalentă a condensatorului cu rezistența de pierderi paralele și diagrama vectorială



De obicei pierderile de energie dintr-un condensator sunt foarte mici, unghiul δ fiind de ordinul fracțiunilor de grad. Unghiul δ este numit unghiul de pierderi al dielectricului respectiv, iar $\text{tg } \delta$ este factorul de pierderi al dielectricului.

Din diagramele fazoriale se deduc relațiile dintre rezistențele de pierderi și $\text{tg } \delta$ când sunt cunoscute capacitatea condensatorului și frecvența de lucru.

$$\text{tg } \delta = \frac{r_{Cs} I}{\frac{U_C}{\omega C}} = \omega r_{Cs} C \quad (4.30.a)$$

$$\text{tg } \delta = \frac{r_{Cp}}{\omega C U_C} = \frac{1}{\omega r_{Cp} C} \quad (4.30.b)$$

Având în vedere valoarea foarte mică a unghiului δ , se poate admite aproximația

$$\text{tg } \delta \approx \delta \quad (4.31)$$

și deci

$$\delta \approx \omega r_{Cs} C \text{ sau } \delta \approx \frac{1}{\omega r_{Cp} C} \quad (4.32)$$

Pierderile în dielectricul unui condensator pot fi caracterizate prin factorul de calitate al condensatorului, definit ca și în cazul bobinelor prin raportul:

$$Q_C = \frac{X_C}{r_C} = \frac{1}{\omega r_C C} = \frac{1}{\text{tg } \delta} \quad (4.33)$$

Observație:

➤ În general factorul de calitate Q_C al condensatoarelor de bună calitate este cu mult superior factorului de calitate Q_L al bobinelor.

Cel mai bun dielectric (după vid) din punct de vedere al pierderilor este aerul. Practic aceste condensatoare nu au pierderi. Ele sunt folosite numai în radioreceptoare sau radioemițătoare de mică putere, deoarece având permitivitatea și rigiditatea dielectricului mică sunt voluminoase.

4.1.3.3. Expresiile matematice ale curentului și a tensiunii

Se analizează circuitul din figura 4.6. în următoarele condiții:

- Se consideră inițial condensatorul C încărcat la valoarea U_0 ;
- R, rezistența de pierderi totală a bobinei și a condensatorului ($R = r_L + r_C \approx r_L$)

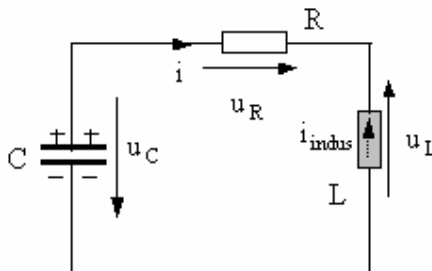


Fig.4.6. Circuitul oscilant R, L, C

Ecuțiile ce descriu circuitul sunt următoarele:

$$\begin{cases} u_L = -L \frac{di}{dt} \\ u_C + u_L - u_R = 0 \\ i = -C \frac{du_C}{dt} \end{cases} \quad (4.34)$$

iar condițiile inițiale sunt precizate de (4.15).

Făcând înlocuirile necesare, se obține o ecuație diferențială de ordinul II, ce poate fi scrisă sub două forme:

- Ecuția diferențială a tensiunii la bornele condensatorului

$$LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} + u_C = 0 \quad (4.35)$$

- Ecuția diferențială a curentului din circuit

$$LC \frac{d^2 i}{dt^2} + RC \frac{di}{dt} + i = 0 \quad (4.36)$$

Ecuțiile (4.35), (4.36) se numesc ecuațiile oscilațiilor libere.

Se observă că ambele ecuații au aceeași ecuație caracteristică

$$r^2 + 2\alpha r + \omega_0^2 = 0 \quad (4.37)$$

unde s-a notat:

$$\alpha = \frac{R}{2L}; \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \quad (4.38)$$

ale cărei soluții sunt:

$$r_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \quad (4.39)$$

Soluțiile generale ale celor două ecuații sunt:

$$\begin{cases} u_C(t) = A_1 e^{r_1 t} + B_1 e^{r_2 t} \\ i(t) = A_2 e^{r_1 t} + B_2 e^{r_2 t} \end{cases} \quad (4.40)$$

Constantele de integrare A_i , B_i se determină din condițiile inițiale (4.15), obținând:

➤ pentru ecuația (4.35), de tensiune

$$\begin{cases} U_0 = A_1 + B_1 \\ 0 = i|_{t=0} = -C \frac{du}{dt} \Big|_{t=0} = -C(r_1 A_1 + r_2 B_1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = \frac{r_2}{r_2 - r_1} U_0 \\ B_1 = -\frac{r_1}{r_2 - r_1} U_0 \end{cases} \quad (4.41)$$

iar expresia tensiunii pe condensator este:

$$u_C(t) = \frac{U_0 e^{-\alpha t}}{2\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}} \left[\alpha \left(e^{\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} t} + e^{-\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} t} \right) - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \left(e^{\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} t} - e^{-\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} t} \right) \right] \quad (4.42)$$

➤ pentru ecuația (4.36), de curent

$$\begin{cases} 0 = A_2 + B_2 \\ U_0 = -\frac{1}{C} \left(\int i dt \right) \Big|_{t=0} = -\frac{1}{C} \left(\frac{A_2}{r_1} + \frac{B_2}{r_2} \right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_2 = \frac{r_1 r_2}{r_1 - r_2} U_0 C \\ B_2 = -\frac{r_1 r_2}{r_1 - r_2} U_0 C \end{cases} \quad (4.43)$$

iar expresia curentului este:

$$i(t) = \frac{U_0}{2\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}} \frac{1}{L} e^{-\alpha t} \left(e^{\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} t} - e^{-\sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} t} \right) \quad (4.44)$$

Observație:

➤ Natura rădăcinilor r_1, r_2 depinde de relația dintre α și ω_0 , astfel:

- Pentru $\alpha > \omega_0$ rădăcinile vor fi reale și distincte;
- Pentru $\alpha = \omega_0$ rădăcinile vor fi reale și egale;
- Pentru $\alpha < \omega_0$ rădăcinile vor fi imaginare și distincte;

Se analizează pe rând aceste trei cazuri

a) Regim aperiodic $\alpha > \omega_0$

Conform (4.38) se poate scrie că:

$$\frac{R}{2L} > \frac{1}{\sqrt{LC}} ; R > 2\sqrt{\frac{L}{C}} ; R > 2Z_C \quad (4.45)$$

Interpretările fizice ale condiției (4.45) pot fi următoarele:

- Rezistența de pierderi a bobinei este mare.
- Factorul de calitate al circuitului este foarte mic; deoarece $R = r_L + r_C \approx r_L$ conform

(4.28) se poate scrie că: $Q = \frac{L\omega_0}{R}$ și din (4.45) rezultă că

$$Q < \frac{1}{2} \quad (4.46)$$

Expresiile (4.42), respectiv (4.44) devin

$$\begin{cases} u_C(t) = \frac{U_0}{2\lambda} e^{-\alpha t} [(\lambda + \alpha)e^{\lambda t} + (\lambda - \alpha)e^{-\lambda t}] \\ i(t) = \frac{U_0}{2\lambda} e^{-\alpha t} \frac{1}{L} [e^{\lambda t} - e^{-\lambda t}] \end{cases} \quad (4.47)$$

sau

$$\begin{cases} u_C(t) = U_0 e^{-\alpha t} \left[\text{ch}(\lambda t) + \frac{\alpha}{\lambda} \text{sh}(\lambda t) \right] \\ i(t) = \frac{U_0}{L} e^{-\alpha t} \text{sh}(\lambda t) \end{cases} \quad (4.48)$$

unde s-a notat

$$\lambda = \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \in \mathbb{R} \quad (4.49)$$

Reprezentarea grafică a curentului și a tensiunii pe condensator este prezentată în figura 4.7.

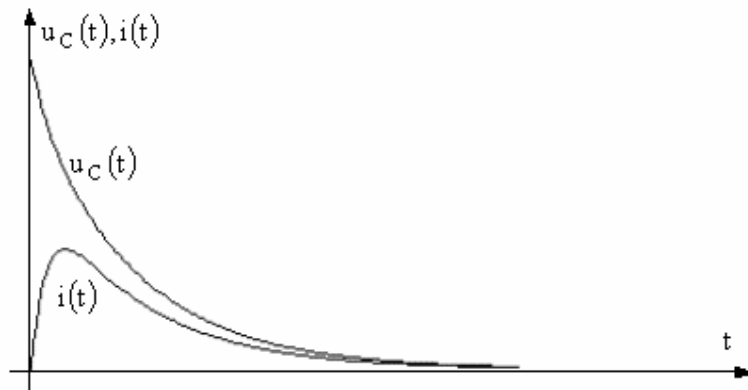


Fig.4.7. Variația în timp (forme de undă) a mărimilor $u_C(t), i(t)$ în cazul regimului aperiodic

Din cauza valorii mari a rezistenței, descărcarea condensatorului se face lent, întreaga sa energie se va consuma prin efectul Joule.

b) Regim aperiodic critic $\alpha = \omega_0$

Conform (4.38) se poate scrie că:

$$R = 2Z_C \Rightarrow \lambda = 0 \quad (4.50)$$

Conform (4.47) rezultă că în acest caz atât pentru tensiune cât și pentru curent se obține o nedeterminare de tipul $0/0$.

În aceste caz se rezolvarea generală a ecuațiilor diferențiale (4.35) și (4.36) este următoarea:

Se observă că ambele ecuații au aceeași ecuație caracteristică

$$(r + \alpha)^2 = 0 \quad (4.51)$$

ale cărei soluții sunt:

$$r = r_1 = r_2 = -\alpha \quad (4.52)$$

Soluția generală a ecuației de tensiune este:

$$u_C(t) = (At + B)e^{-\alpha t} \quad (4.53)$$

Constantele de integrare A, B, se determină din condițiile inițiale (4.15), obținând:

$$\begin{cases} U_0 = B \\ 0 = i|_{t=0} = -C \frac{du}{dt}|_{t=0} = -C(A - \alpha B_1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \alpha U_0 \\ B_1 = U_0 \end{cases} \quad (4.54)$$

expresia tensiunii pe condensator este:

$$u_C(t) = (1 + \alpha t) U_0 e^{-\alpha t} \quad (4.55)$$

expresia curentului se obține din $i = -C \frac{du_C}{dt}$, rezultând că:

$$i(t) = \frac{U_0}{L} t e^{-\alpha t} \quad (4.56)$$

Reprezentarea grafică a curentului și a tensiunii pe condensator $i(t), u_C(t)$ este prezentată în figura 4.8.

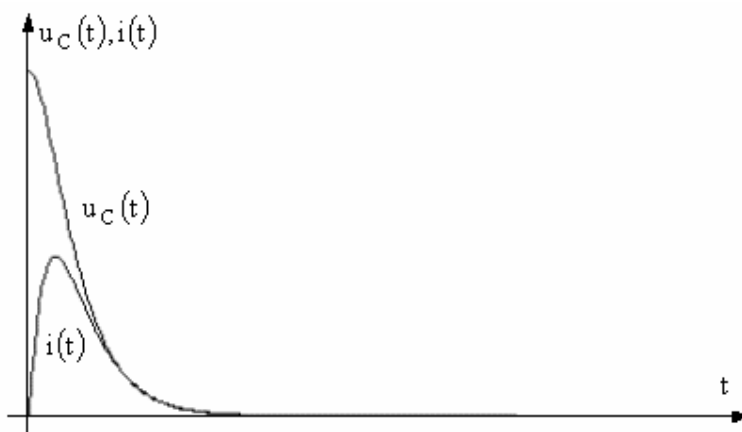


Fig.4.8.Variația în timp (forme de undă) a mărimilor $u_C(t), i(t)$ în cazul regimului aperiodic critic

Acest regim reprezintă limita dintre regimul aperiodic și cel periodic. El are doar un interes matematic, deoarece practic nu se poate realiza un circuit care să satisfacă exact condiția (4.50)

c) Regim periodic $\alpha < \omega_0$

Conform (4.38) se poate scrie că:

$$R < 2Z_C \Rightarrow \lambda \notin \text{Re} \quad (4.57)$$

Se notează:

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} ; \lambda = j\omega_1 \quad (4.58)$$

inând cont de formulele lui Euler expresiile tensiunii respectiv curentului vor fi:

$$\begin{cases} u_C(t) = U_0 e^{-\alpha t} \left[\cos \omega_1 t + \frac{\alpha}{\omega_1} \sin \omega_1 t \right] \\ i(t) = \frac{U_0}{\omega_1 L} e^{-\alpha t} \sin \omega_1 t \end{cases} \quad (4.59)$$

Expresiile (4.59) reprezintă ecuația oscilațiilor libere amortizate. Cu ω_1 s-a notat pulsația oscilațiilor libere.

Reprezentarea grafică a curentului și a tensiunii pe condensator este prezentată în figura 4.9.

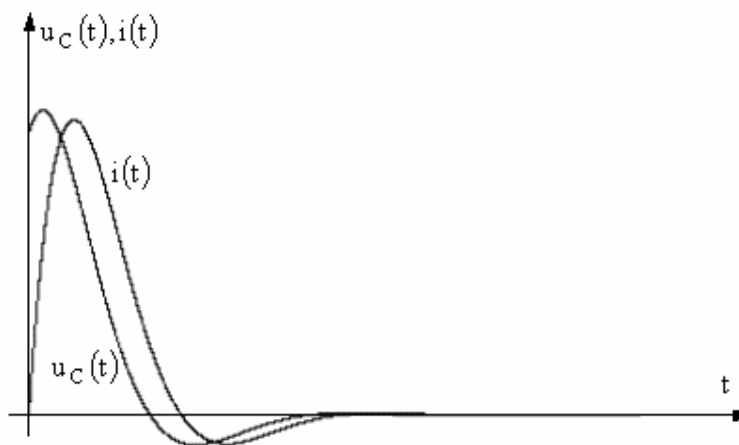


Fig.4.9. Variația în timp (forme de undă) a mărimilor $u_C(t), i(t)$ în cazul regimului periodic

Observație:

➤ În practică se aleg circuite cu factor de calitate cât mai bun

$$Q = \frac{Z_C}{R} \gg \Rightarrow R \ll 2Z_C \text{ sau } \alpha \ll \omega_0 \quad (4.60)$$

În acest caz variația curentului este prezentată în figura 4.10.

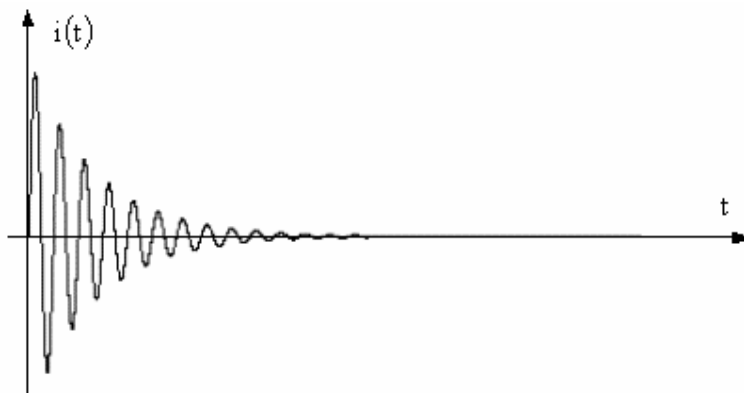


Fig. 4.10 Variația în timp a curentului, în cazul regimului periodic, pentru un circuit R, L, C cu un factor de calitate bun

În cazul în care $\alpha \ll \omega_0 \Rightarrow \alpha \ll \omega_1$ ecuațiile (4.59) se simplifică devenind:

$$\begin{cases} u_C(t) = U_0 e^{-\alpha t} \cos \omega_1 t \\ i(t) = \frac{U_0}{\omega_1 L} e^{-\alpha t} \sin \omega_1 t = \omega_1 C U_0 e^{-\alpha t} \sin \omega_1 t \end{cases} \quad (4.61)$$

Observații:

➤ Descărcarea condensatorului are un caracter oscilant. Amplitudinea oscilațiilor scade continuu, din cauza pierderilor ce însoțesc schimbul de energie dintre bobină și condensator. Aceste oscilații se numesc amortizate.

$$\begin{cases} U = U_0 e^{-\alpha t} \\ I = \frac{U_0}{\omega_1 L} e^{-\alpha t} \end{cases} \quad (4.62)$$

➤ Gradul de amortizare se apreciază prin raportul a două amplitudini succesive din seria: $U_0 ; U_0 e^{-\alpha T_1} ; U_0 e^{-2\alpha T_1} ; U_0 e^{-3\alpha T_1} ; \dots ; U_0 e^{-n\alpha T_1} \dots$

unde $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$. Rezultă că:

$$\frac{(U_{\max})_n}{(U_{\max})_{n+1}} = \frac{U_0 e^{-n\alpha T_1}}{U_0 e^{-(n+1)\alpha T_1}} = \frac{1}{e^{-\alpha T_1}} = e^{\alpha T_1} \quad (4.63)$$

Pentru un circuit dat acest raport rămâne constant pe întreaga durată a procesului. În calcule se folosește de obicei logaritmul natural al raportului (4.63) numit decrement logaritm al circuitului.

$$\delta = \ln \frac{(U_{\max})_n}{(U_{\max})_{n+1}} = \alpha T_1 \quad (4.64)$$

➤ Timpul de amortizare τ_a s-a ales în mod convențional ca fiind timpul în care amplitudinea oscilației scade la 1/10 din amplitudinea inițială.

$$U_0 e^{-\alpha \tau_a} = \frac{U_0}{10} \Rightarrow -\alpha \tau_a = \ln 10 \Rightarrow \tau_a \cong \frac{2,306}{\alpha} \quad (4.65)$$

➤ Viteza de stingere a oscilațiilor depinde de mărimea coeficientului α , numit din această cauză coeficient de amortizare. Cu cât rezistența de pierderi a circuitului este mai mare cu atât amortizarea circuitului este mai puternică.

➤ Oscilațiile amortizate nu reprezintă un proces periodic, deoarece tensiunea sau curentul nu se repetă identic. Totuși datorită faptului că oscilațiile trec prin zero, prin maxime și prin minime la intervale egale de timp, ele constituie un regim oscilant pseudoperiodic. În acest caz perioada oscilațiilor proprii, libere, ale circuitului se numește pseudoperioadă. Mărimea ei este determinată de timpul dintre două treceri consecutive prin zero, în același sens.

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}} \quad (4.66)$$

Din (4.66) rezultă că mărirea coeficientului de amortizare a circuitului are ca efect mărirea perioadei de oscilație.

Concluzie:

➤ În cazul circuitului oscilant real oscilațiile nu au un caracter periodic. Ele se sting datorită pierderilor din condensator și bobină din cauza faptului că circuitul nu este “alimentat” periodic cu energie suplimentară care să o înlocuiască pe cea pierdută. În practică pierderile unui circuit oscilant sunt mici, curentul prin circuit având un caracter oscilant pseudoperiodic, vezi figura 4.10. Expresiile curentului și a tensiunii de pe condensator sunt date de (4.61).

4.2. Oscilații forțate în circuitul serie (C.O.S.)

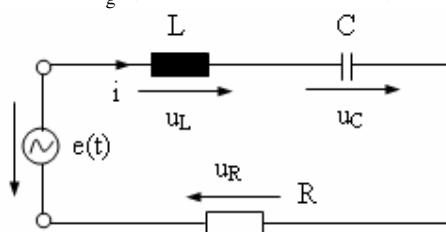
4.2.1. Generalități

Schema circuitului oscilant serie este prezentată în figura 4.11.

Observații:

- Bobina și condensatorul sunt conectate în serie;
- Rezistența R este rezistența activă a întregului circuit serie, reprezentând suma rezistențelor de pierderi ale bobinei, condensatorului și generatorului de tensiune (sinusoidală) care acționează în circuit. De asemenea această rezistență este plasată în serie cu bobina și condensatorul, considerate ideale.

- În serie cu elementele circuitului acționează o sursă de tensiune sinusoidală $e(t) = E \cos \omega_g t$, care excită circuitul, ducând la apariția unui curent.



Mărimile ce caracterizează un C.O.S. sunt:

L – inductanța bobinei;

C – capacitatea condensatorului;

R – rezistența totală de pierderi;

Fig. 4.11 Schema unui circuit oscilant serie R.L.C.

Important:

- Caracteristica fundamentală a C.O.S. o constituie faptul că dacă acest circuit este excitat cu o tensiune sinusoidală, prin circuit apare un curent i cu același caracter sinusoidal și cu aceeași frecvență ca a sursei.

4.2.2. Analiza în timp a circuitului

În cadrul acestui paragraf se va demonstra că răspunsul (curentul prin circuit) C.O.S. la o excitație sinusoidală este sinusoidal.

Ecuțiile ce descriu circuitul sunt:

$$\begin{cases} u_L = L \frac{di}{dt} \\ e - u_R - u_C - u_L = 0; E \cos \omega_g t = u_R + u_C + u_L; u_R = R i \\ i = C \frac{du_C}{dt}; u_C = \frac{1}{C} \int i dt \end{cases} \quad (4.67)$$

iar condițiile inițiale sunt:

$$\begin{cases} u_C(0) = 0 \\ i(0) = 0 \end{cases} \quad (4.68)$$

Determinarea expresiilor tensiunilor și a curenților prin circuit impune rezolvarea unei ecuații diferențiale neomogene de gradul II. Această ecuație poate fi scrisă sub două forme:

a) ecuația de tensiune

Din (4.67) rezultă că:

$$\begin{cases} u_R = RC \frac{du_C}{dt} \\ u_L = -LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} \end{cases} \quad (4.69)$$

Ecuația are forma

$$LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} + u_C = E \cos \omega_g t \quad (4.70)$$

b) ecuația de curent

Din (4.67) rezultă că:

$$E \cos \omega_g t - R i - \frac{1}{C} \int i dt - L \frac{di}{dt} = 0$$

iar prin derivare, rezultă că:

$$LC \frac{d^2 i}{dt^2} + RC \frac{di}{dt} + i = -\omega_g C E \sin \omega_g t \quad (4.71)$$

Pentru a determina expresiile semnalelor din circuit se va rezolva doar ecuația de tensiune.

Se poate scrie că:

$$u_C(t) = u_{C1}(t) + u_{Cf}(t) \quad (4.72)$$

unde

➤ $u_{C1}(t)$ - soluția de regim liber – este dată de rezolvarea ecuației diferențiale omogene de gradul II

➤ $u_{Cf}(t)$ - soluția de regim forțat – este o soluție particulară a ecuației (4.70) de forma

$$u_{Cf}(t) = M \sin \omega_g t + N \cos \omega_g t \quad (4.73)$$

1. Determinarea soluției de regim forțat

Această expresie poate fi pusă sub următoarea formă:

$$\begin{aligned} u_{Cf}(t) &= M \sin \omega_g t + N \cos \omega_g t = M \left[\sin \omega_g t + \frac{N}{M} \cos \omega_g t \right] = \\ &= M \left[\sin \omega_g t - \operatorname{tg} \varphi \cos \omega_g t \right] = M \left[\sin \omega_g t - \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \cos \omega_g t \right] = \\ &= \frac{M}{\cos \varphi} \left[\sin \omega_g t \cos \varphi - \sin \varphi \cos \omega_g t \right] = \frac{M}{\cos \varphi} \sin(\omega_g t - \varphi) \end{aligned} \quad (4.74)$$

unde s-a notat

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{N}{M} \quad (4.75)$$

cum $\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}}$ rezultă că:

$$u_{Cf}(t) = \frac{M}{\cos \varphi} \sin(\omega_g t - \varphi) = M \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} \sin(\omega_g t - \varphi) \quad (4.76)$$

ce verifică ecuația diferențială neomogenă de gradul II.

Se poate scrie că:

$$\begin{cases} \frac{d u_{Cf}(t)}{d t} = M \omega_g \cos \omega_g t - N \omega_g \sin \omega_g t \\ \frac{d^2 u_{Cf}(t)}{d t^2} = -M \omega_g^2 \sin \omega_g t - N \omega_g^2 \cos \omega_g t \end{cases}$$

Prin înlocuirea derivatelor soluției de regim forțat în (4.70) rezultă că:

$$\begin{aligned} LC[-M \omega_g^2 \sin \omega_g t - N \omega_g^2 \cos \omega_g t] + RC[M \omega_g \cos \omega_g t - N \omega_g \sin \omega_g t] + \\ + M \sin \omega_g t + N \cos \omega_g t = E \cos \omega_g t \end{aligned}$$

Prin identificare rezultă că:

$$\begin{cases} [M - N \omega_g RC - M \omega_g^2 LC] \sin \omega_g t = 0 \\ [N + M \omega_g RC - N \omega_g^2 LC] \cos \omega_g t = E \cos \omega_g t \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} M - N \omega_g RC - M \omega_g^2 LC = 0 \\ N + M \omega_g RC - N \omega_g^2 LC = E \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{N}{M} = \frac{1 - \omega_g^2 LC}{\omega_g RC} = -\frac{\omega_g L - \frac{1}{\omega_g C}}{R} \\ M = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega_g L - \frac{1}{\omega_g C}}{R} \right)^2} \frac{E}{\omega_g RC} \end{cases}$$

Conform (4.73) rezultă că:

$$\begin{cases} \frac{N}{M} = -\operatorname{tg} \varphi ; \operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega_g L - \frac{1}{\omega_g C}}{R} \\ M = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} \frac{E}{\omega_g RC} = \frac{E}{\omega_g RC} \cos^2 \varphi \end{cases} \quad (4.77)$$

Din (4.76) și (4.77) rezultă că:

$$u_{cf}(t) = \frac{E}{\omega_g RC} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_g L - \frac{1}{\omega_g C}}{R} \right)^2}} \sin(\omega_g t - \varphi) = \frac{E}{\omega_g RC} \cos \varphi \sin(\omega_g t - \varphi) \quad (4.78)$$

2. Determinarea soluției de regim liber

Soluția este dată de rezolvarea ecuației diferențiale omogene de gradul II

$$LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} + u_C = 0$$

a cărei ecuație caracteristică este $r^2 + 2\alpha r + \omega_0^2 = 0$

unde s-a notat:

$$\alpha = \frac{R}{2L}; \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \quad (4.79)$$

ale cărei soluții sunt:

$$\begin{cases} r_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -\alpha + j\omega_1 \\ r_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = -\alpha - j\omega_1 \end{cases} \quad (4.80)$$

iar soluția generală ale ecuației este:

$$u_{C1}(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} = \left(Ae^{j\omega_1 t} + Be^{-j\omega_1 t} \right) e^{-\alpha t} \quad (4.81)$$

Se va studia doar cazul în care $\alpha < \omega_0$, adică circuitul oscilant are pierderi mici.

Constantele de integrare A, B, se determină din condițiile inițiale (4.68), care sunt aplicate soluției generale (4.72) a ecuației diferențiale.

Soluția generală a ecuației diferențiale se obține înlocuind (4.78) și (4.81) în (4.72), adică:

$$u_C(t) = u_{C1}(t) + u_{cf}(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} + \frac{E}{\omega_g RC} \cos \varphi \sin(\omega_g t - \varphi) \quad (4.82)$$

Din (4.68) rezultă că:

$$\begin{cases} u_C(0) = A + B - \frac{E \cos \varphi \sin \varphi}{\omega_g RC} = 0 \\ i(0) = \frac{du_C}{dt} \Big|_{t=0} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A + B = \frac{E \cos \varphi \sin \varphi}{\omega_g RC} \\ \left[r_1 A e^{r_1 t} + r_2 B e^{r_2 t} + \frac{E \cos \varphi}{RC} \cos(\omega_g t - \varphi) \right] \Big|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} B = \frac{E}{\omega_g RC} \cos \varphi \sin \varphi - A \\ r_1 A + r_2 B + \frac{E}{RC} \cos^2 \varphi = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = \frac{E}{\omega_g RC} \cos \varphi \sin \varphi - A \\ A(r_2 - r_1) = \frac{E}{\omega_g RC} \cos^2 \varphi (r_2 \operatorname{tg} \varphi + \omega_g) \end{cases}$$

În final se obține:

$$A = \frac{E}{\omega_g R C} \cos^2 \varphi \frac{(r_2 \operatorname{tg} \varphi + \omega_g)}{(r_2 - r_1)}$$

$$B = \frac{E}{\omega_g R C} \cos \varphi \sin \varphi - \frac{E}{\omega_g R C} \cos^2 \varphi \frac{(r_2 \operatorname{tg} \varphi + \omega_g)}{(r_2 - r_1)} = -\frac{E}{\omega_g R C} \cos^2 \varphi \frac{(r_1 \operatorname{tg} \varphi + \omega_g)}{(r_2 - r_1)}$$

Înlocuind expresiile constantelor în (4.78) soluția de regim liber are expresia:

$$\begin{aligned} u_{C1}(t) &= A e^{\eta_1 t} + B e^{r_2 t} = \frac{E}{\omega_g R C} \frac{\cos^2 \varphi}{(r_2 - r_1)} \left[(r_2 \operatorname{tg} \varphi + \omega_g) e^{\eta_1 t} - (r_1 \operatorname{tg} \varphi + \omega_g) e^{r_2 t} \right] = \\ &= \frac{E}{\omega_g R C} \frac{\cos^2 \varphi}{(-2j\omega_1)} \left[\omega_g (e^{j\omega_1 t} - e^{-j\omega_1 t}) + \operatorname{tg} \varphi (r_2 e^{j\omega_1 t} - r_1 e^{-j\omega_1 t}) \right] e^{-\alpha t} = \\ &= \frac{E}{\omega_g R C} \cos^2 \varphi \left[\frac{\operatorname{tg} \varphi}{2j\omega_1} (r_1 e^{j\omega_1 t} - r_2 e^{-j\omega_1 t}) - \frac{\omega_g}{\omega_1} \frac{e^{j\omega_1 t} - e^{-j\omega_1 t}}{2j} \right] e^{-\alpha t} = \\ &= \frac{E}{\omega_g R C} \cos^2 \varphi \left[\frac{\alpha (e^{j\omega_1 t} - e^{-j\omega_1 t})}{2j\omega_1} + \frac{(e^{j\omega_1 t} + e^{-j\omega_1 t})}{2} - \frac{\omega_g}{\omega_1} \frac{e^{j\omega_1 t} - e^{-j\omega_1 t}}{2j} \right] e^{-\alpha t} \end{aligned}$$

Ținând cont de formulele lui Euler, se poate scrie că:

$$\begin{aligned} u_{C1}(t) &= \frac{E}{\omega_g R C} \cos^2 \varphi \left[\frac{\alpha}{\omega_1} \operatorname{tg} \varphi \sin \omega_1 t + \operatorname{tg} \varphi \cos \omega_1 t - \frac{\omega_g}{\omega_1} \sin \omega_1 t \right] e^{-\alpha t} = \\ &= \frac{E}{\omega_g R C} \cos^2 \varphi \left[\left(\frac{\alpha}{\omega_1} \operatorname{tg} \varphi - \frac{\omega_g}{\omega_1} \right) \sin \omega_1 t + \operatorname{tg} \varphi \cos \omega_1 t \right] e^{-\alpha t} = \\ &= \frac{E}{\omega_g R C} \cos^2 \varphi \left(\frac{\alpha}{\omega_1} \operatorname{tg} \varphi - \frac{\omega_g}{\omega_1} \right) \left[\sin \omega_1 t + \operatorname{tg} \psi \cos \omega_1 t \right] e^{-\alpha t} \end{aligned}$$

unde s-a notat:

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\left(\frac{\alpha}{\omega_1} \operatorname{tg} \varphi - \frac{\omega_g}{\omega_1} \right)} \quad (4.83)$$

În final se obține:

$$u_{C1}(t) = \frac{E}{\omega_g R C} \frac{\cos^2 \varphi}{\cos \psi} \left(\frac{\alpha}{\omega_1} \operatorname{tg} \varphi - \frac{\omega_g}{\omega_1} \right) \sin(\omega_1 t + \psi) e^{-\alpha t} \quad (4.84)$$

În concluzie expresia tensiunii de pe condensator are expresia:

$$u_C(t) = \frac{E}{\omega_g R C} \left[\frac{\cos^2 \varphi}{\cos \psi} \left(\frac{\alpha}{\omega_1} \operatorname{tg} \varphi - \frac{\omega_g}{\omega_1} \right) \sin(\omega_1 t + \psi) e^{-\alpha t} + \cos \varphi \sin(\omega_g t - \varphi) \right] \quad (4.85)$$

Important:

➤ În cazul circuitelor oscilante forțate componenta liberă a tensiunii pe condensator are o influență nesemnificativă asupra funcționării circuitului, acest lucru fiind pus în evidență prin următoarele reprezentări grafice (obținute cu ajutorul Matchad)

I. Reprezentarea grafică a tensiunii de pe condensator în cazul în care $\alpha < \omega_0$, dar pierderile din circuit sunt semnificative.

Parametrii circuitului și ai semnalului sunt:

$$R=10\Omega; L=\frac{\pi}{10} \text{ mH}; C=\pi\mu\text{F}; f_g=20 \text{ kHz};$$

➤ Variația componentei libere a tensiunii de pe condensator

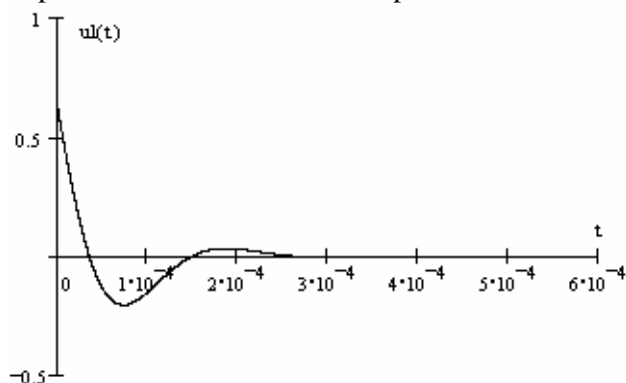


Fig.4.12 Variația componentei libere a tensiunii de pe condensator

Se observă rapida amortizare a acesteia

➤ Variația componentei forțate a tensiunii de pe condensator

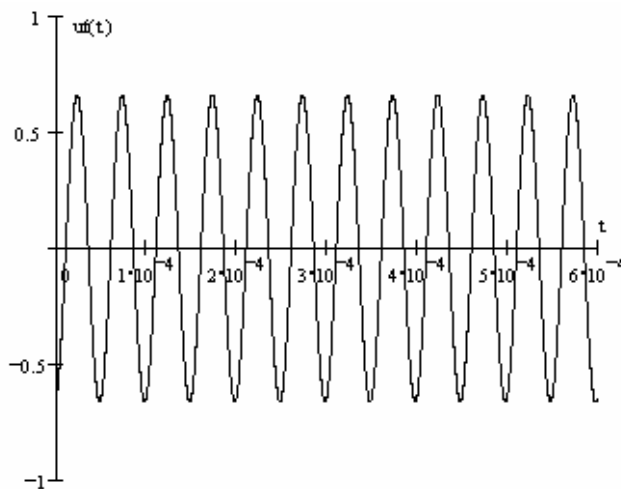


Fig. 4.13 Variația componentei forțate a tensiunii de pe condensator

Se observă că frecvența acesteia este egală cu frecvența excitației $e(t)$

➤ Variația tensiunii de pe condensator

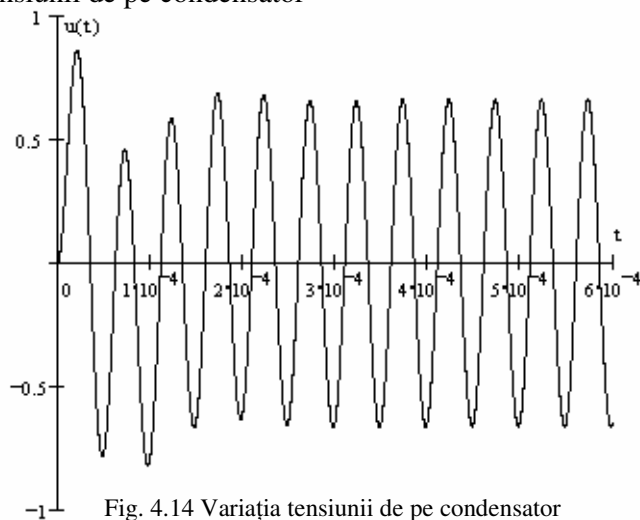


Fig. 4.14 Variația tensiunii de pe condensator

Se observă că durata regimul tranzitoriu este foarte mică.

II Reprezentarea grafică a tensiunii de pe condensator în cazul în care $\alpha < \omega_0$, dar pierderile din circuit sunt ne semnificative $\alpha \ll \omega_0$.

Parametrii circuitului și ai semnalului sunt:

$$R = 0,1 \Omega; L = \frac{\pi}{10} \text{ mH}; C = \pi \mu\text{F}; f_g = 20 \text{ kHz};$$

Variația componentei libere a tensiunii de pe condensator:

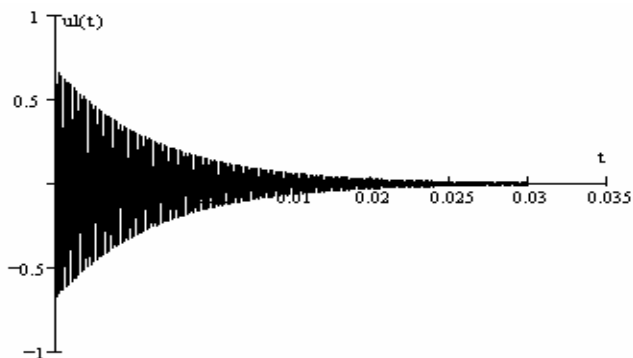


Fig. 4.15 Variația componentei libere a tensiunii de pe condensator

Se observă că durata de amortizare este mai mare.

Variația tensiunii de pe condensator

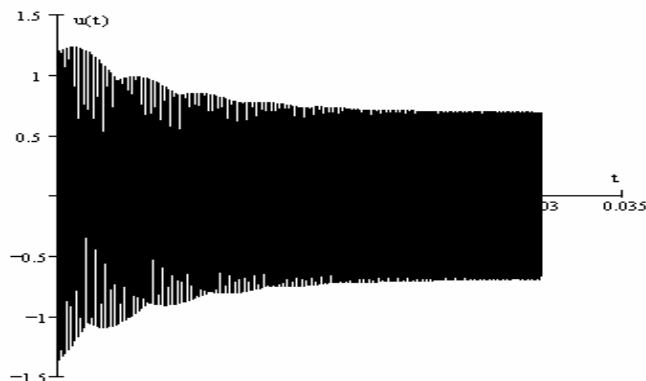


Fig. 4.16 Variația tensiunii de pe condensator

Regimul permanent al tensiunii de pe condensator este ilustrat în figura 4.17

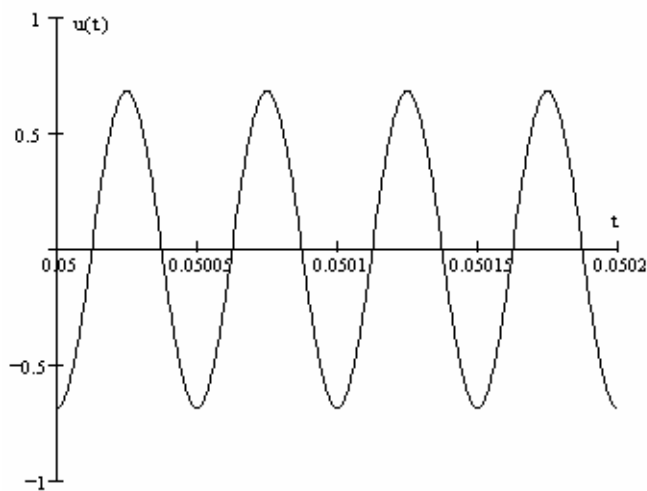


Fig. 4.17 Variația tensiunii de pe condensator în cazul regimului permanent

Concluzie:

➤ Studiul circuitelor oscilante serie în regim forțat (cu excitație sinusoidală) se realizează în regim permanent.

Cum pulsația (frecvența) excitației poate lua orice valoare pozitivă aceasta se va nota în continuare cu ω .

În acest caz, semnalele din circuit au expresiile:

➤ curentul prin circuit

$$i = C \frac{du_C}{dt} = I \cos(\omega t - \varphi) \quad (4.86)$$

unde

$$I = \frac{E}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \quad (4.87)$$

- tensiunea de pe condensator

$$u_C(t) = U_C \sin(\omega t - \varphi) \quad (4.88)$$

unde

$$U_C = \frac{E}{\omega RC} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right)^2}} = \frac{1}{\omega C} \frac{E}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{1}{\omega C} I \quad (4.89)$$

tensiunea de pe bobină

$$u_L = L \frac{di}{dt} = -U_L \sin(\omega t - \varphi) \quad (4.90)$$

unde

$$U_L = \frac{\omega L E}{R} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right)^2}} = \omega L \frac{E}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \omega L I \quad (4.91)$$

4.2.3. Reprezentări fazoriale și liniare (forme de undă)

Deoarece mărimile ce caracterizează un C.O.S. sunt funcții sinusoidale de aceeași frecvență, se poate utiliza calculul fazorial.

$$\text{Ecuatiei } e = E \cos \omega t = u_R + u_L + u_C = R i + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt$$

i se asociază următoarea ecuație fazorială:

$$\underline{E} = R \underline{I} + j\omega L \underline{I} + \left(-j \frac{1}{\omega C}\right) \underline{I} = \left[R + j\omega L + \left(-j \frac{1}{\omega C}\right) \right] \underline{I} \quad (4.92)$$

Se notează:

- Reactanța bobinei:

$$X_L = \omega L \quad (4.93)$$

- Reactanța condensatorului:

$$X_C = \frac{1}{\omega C} \quad (4.94)$$

- Reactanța circuitului:

$$X = \omega L - \frac{1}{\omega C} \quad (4.95)$$

- Impedanța circuitului serie:

$$\underline{Z}_S = R + j\omega L + \left(-j \frac{1}{\omega C}\right) = R + jX_L - jX_C = R + jX \quad (4.96)$$

- Modulul impedanței are expresia:

$$Z_s = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{R^2 + X^2} \quad (4.97)$$

- Argumentul impedanței:

$$\varphi = \arctg \left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \right) \quad (4.98)$$

În mod uzual expresia (4.97) se numește impedanța circuitului, iar (4.98) defazajul dintre curent(i) și tensiune(e).

În acest caz amplitudinea curentului prin circuit se poate scrie:

$$I = \frac{E}{Z_s} \quad (4.99)$$

Observații:

- Răspunsul circuitului R, L, C, la acțiunea excitației $e = E \cos \omega t$, depinde de frecvență.

Curba de răspuns

$$I = I(\omega) \quad (4.100)$$

constituie caracteristica de frecvență a circuitului.

- Proprietatea de a deosebi curenții după frecvență se numește selectivitate, ea constituind principala caracteristică a circuitelor R, L, C.

În funcție de valorile reactanței capacitive și inductive circuitul poate avea caracter inductiv sau capacitiv, vezi figura 4.18.

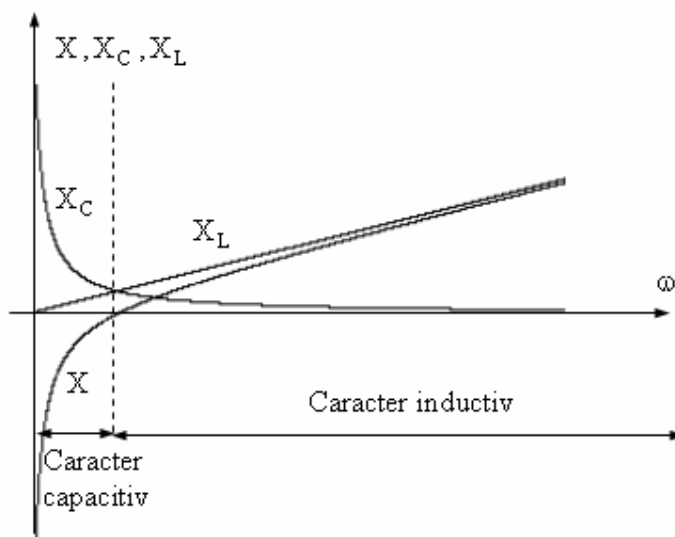


Fig.4.18 Variația reactanțelor funcție de pulsație

În figura 4.19 este prezentată diagrama fazorială a impedanței C.O.S. pentru cele două cazuri (caracter inductiv, respectiv capacitiv).

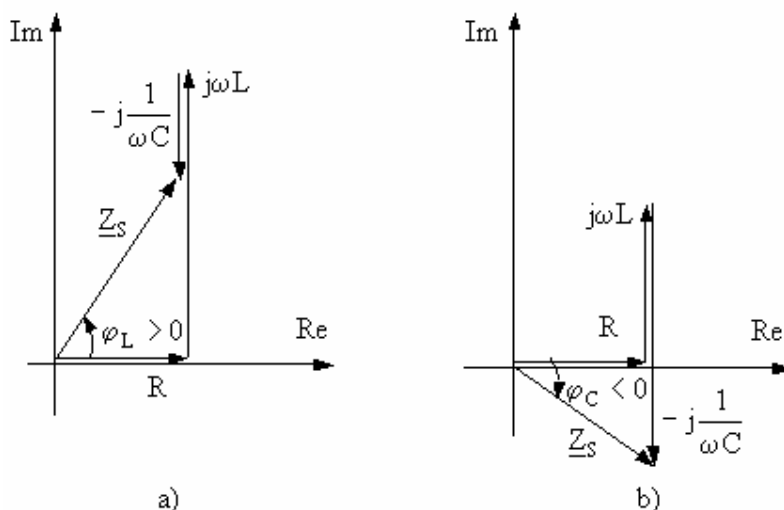


Fig.4.19 Diagrama fazorială atașată impedanței C.O.S.

a) în cazul în care acesta are un caracter inductiv; b) în cazul în care acesta are un caracter capacitiv

În figura 4.19 se poate oferi o interpretare fizică expresiei (4.98), astfel:

- $\omega L > \frac{1}{\omega C}$, reactanța bobinei este mai mare decât reactanța condensatorului și în consecință $\varphi > 0$. Uzual se utilizează notația φ_L .
- $\frac{1}{\omega C} > \omega L$, reactanța condensatorului este mai mare decât reactanța bobinei și în consecință $\varphi < 0$. Uzual se utilizează notația φ_C .

Pentru a reprezenta diagrama fazorială a tensiunilor se alege ca origine de fază tensiunea de pe rezistența de pierderi \underline{U}_R . Se face această alegere deoarece diagrama fazorială a tensiunilor este echivalentă cu diagrama fazorială a reactanțelor, iar diagrama tensiunilor se obține prin înmulțirea reactanțelor cu curentul \underline{I} din circuit.

Important:

- Deoarece tensiunea de pe rezistorul R este în fază cu curentul din circuit, ca origine de fază pentru diagrama fazorială a tensiunilor se alege curentul \underline{I} .

Această diagramă fazorială conține următoarele mărimi:

- Tensiunea pe rezistor: $\underline{U}_R = R \underline{I}$ este în fază cu curentul.
- Tensiunea pe bobină : $\underline{U}_L = j\omega L \underline{I}$ este defazată cu $+90^\circ$ (înainte) față de curent.
- Tensiunea pe condensator: $\underline{U}_C = \left(-j\frac{1}{\omega C}\right) \underline{I}$ este defazată cu -90° (în urmă) față de curent.

Reprezentările fazoriale ale tensiunilor sunt prezentate în figura 4.20.

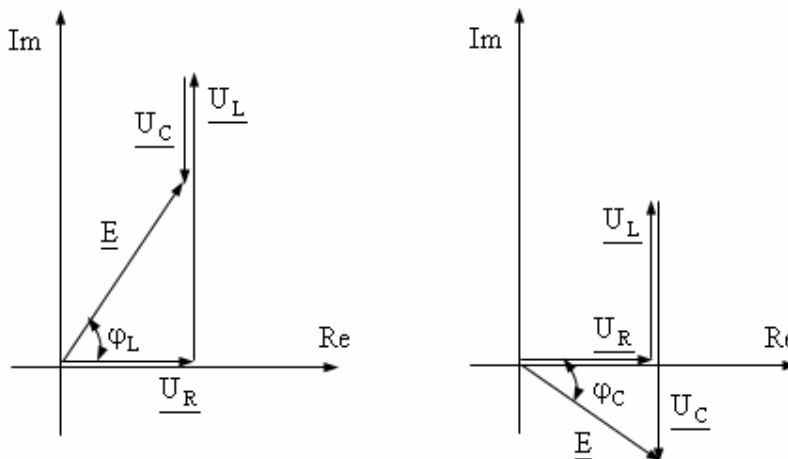


Fig.4.20 Diagrama fazorială asociată tensiunilor din C.O.S.

a) în cazul în care acesta are un caracter inductiv; b) în cazul în care acesta are un caracter capacitiv

1) Circuitul are un caracter inductiv – vezi figura 4.19a) și 4.20a).

➤ $X_L > X_C; \omega L > \frac{1}{\omega C}; X > 0$ (4.101)

➤ Curentul i este defazat în urma tensiunii de excitație e , $\varphi_L > 0$

În figura 4.21 sunt reprezentate formele de undă ale tensiunii de excitație și a curentului prin circuit în cazul regimului inductiv.

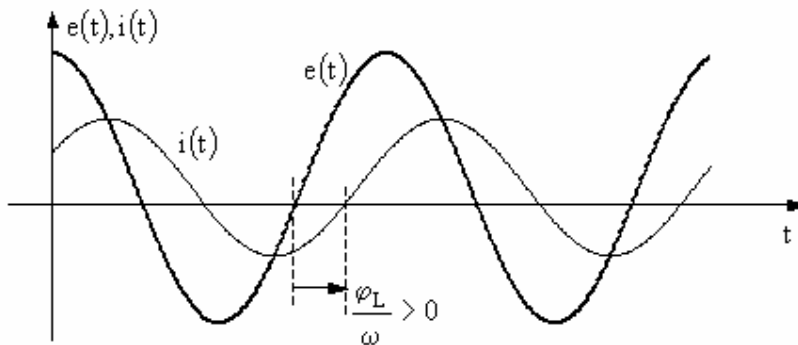


Fig.4.21 Variația tensiunii de excitație și a curentului din circuit, în cazul regimului inductiv

2) Circuitul are un caracter capacitiv – vezi figura 4.19b) și 4.20b).

➤ $X_L < X_C; \omega L < \frac{1}{\omega C}; X < 0$ (4.102)

➤ Curentul i este defazat înaintea tensiunii de excitație e , $\varphi_C < 0$

În figura 4.22 sunt reprezentate formele de undă ale tensiunii de excitație și a curentului prin circuit în cazul regimului capacitiv.

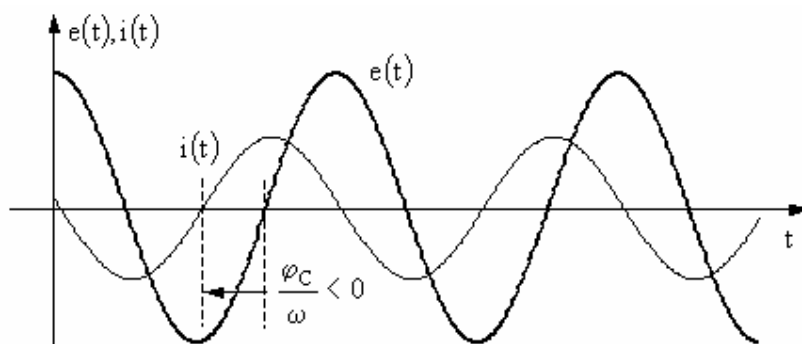


Fig.4.22. Variația tensiunii de excitație și a curentului din circuit, în cazul regimului capacitiv

În figura 4.23 sunt reprezentate formele de undă ale tensiunilor și curentului ce caracterizează funcționarea unui C.O.S., în regim inductiv, respectiv capacitiv.

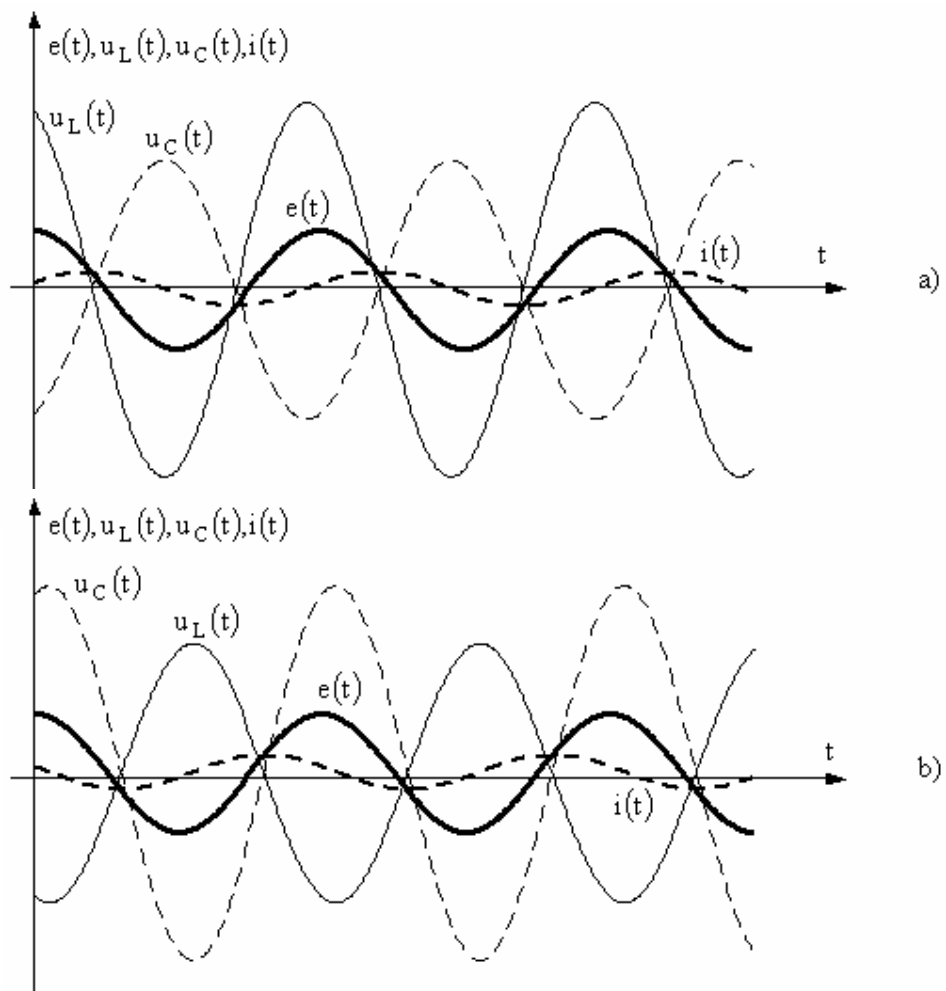


Fig.4.23. Variația tensiunilor și curentului ce caracterizează funcționarea unui C.O.S.
a) în regim inductiv; b) în regim capacitiv

4.2.4. Fenomenul de rezonanță

4.2.4.1. Noțiuni generale

Considerând un circuit oscilant dat (valorile bobinei și a condensatorului sunt constante), în cazul în care pulsația ω (frecvența f) a sursei (excitației) este variabilă, reactanța circuitului X și deci impedanța Z_S depind de valoarea acesteia.

$$X = X(f); Z_S = Z_S(f) \quad (4.103)$$

Definiție:

- Cazul particular în care reactanța circuitului este nulă se numește rezonanță. Aplicând relației (4.103) definiția rezonanței se determină frecvența de rezonanță:

$$X = \omega L - \frac{1}{\omega C} = 0 \Rightarrow \omega_{s_0} = \frac{1}{\sqrt{LC}}; f_{s_0} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (4.104)$$

Interpretări fizice ale fenomenului de rezonanță:

- Reactanța bobinei este egală cu cea a condensatorului $X_L = X_C$;
- Circuitul este la rezonanță atunci când frecvența sursei de excitație coincide cu frecvența oscilațiilor libere ale circuitului R.L.C. $\omega_{s_0} = \omega_0$;
- Sursa excită circuitul, cedându-i energie în tactul propriilor lui oscilații, adică în ritmul oscilațiilor libere. Pentru întreținerea oscilațiilor sursa trebuie doar să completeze – după fiecare oscilație – rezerva inițială de energie a circuitului cedându-i doar atât cât acesta pierde;
- Rezonanța constituie punctul de întâlnire între două regimuri de oscilație diferite: regimul oscilațiilor forțate (care impune frecvența curentului prin circuit) și regimul oscilațiilor libere (propriu circuitului, independent de impunerile exterioare).

Observație:

- În cazul în care se cere determinarea frecvenței de oscilație a unui circuit oarecare se procedează astfel: se calculează expresia impedanței ce se scrie $Z_S = \text{Re} + j\text{Im}$.

Determinarea frecvenței de oscilație se obține prin rezolvarea ecuației $\text{Im}=0$.

4.2.4.2. Consecințele fenomenului de rezonanță

- Impedanța circuitului devine minimă și are caracter pur rezistiv;

Din (4.97) și (4.104) se obține că:

$$Z_{s_0} = R \quad (4.105)$$

- Curentul prin circuit este în fază cu tensiunea de excitație;

Din (4.98) și (4.104) se obține că:

$$\varphi_{s_0} = 0 \quad (4.106)$$

- Curentul prin circuit are amplitudinea maximă;

Din (4.96) și (4.104) se obține că:

$$I_{s_0} = \frac{E}{R} \quad (4.107)$$

- Puterea electrică absorbită de circuit de la sursă este maximă;

$$P_a = EI_{s_0} = R I_{s_0}^2 \quad (4.108)$$

Ilustrarea grafică a fenomenului de rezonanță este exemplificată în figura 4.24 unde este prezentată diagrama fazorială a circuitului pentru tensiuni (figura 4.24a) și pentru impedanțe (figura 4.24b).

Considerând un circuit oscilant dat (valorile bobinei și a condensatorului sunt constante), în cazul în care pulsația ω (frecvența f) a sursei (excitației) este variabilă, reactanța circuitului X și deci impedanța Z_S depind de valoarea acesteia.

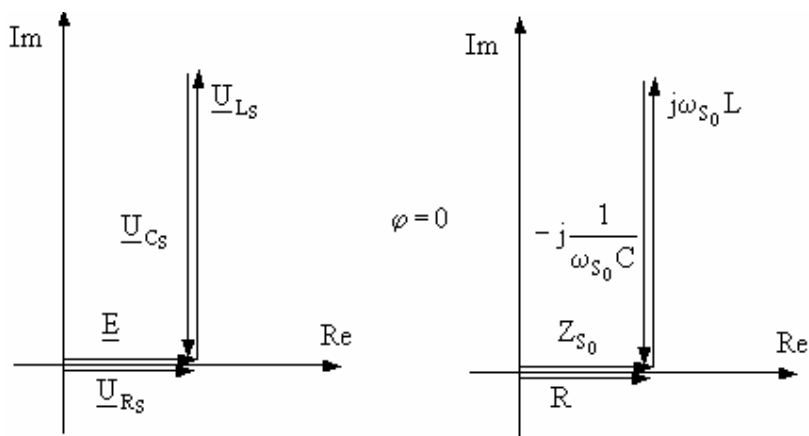


Fig.4.24 Diagrama fazorială asociată C.O.S. în cazul rezonanței;
 a) Diagrama fazorială pentru tensiuni; b) Diagrama fazorială pentru impedanțe

4.2.4.3. Rezonanța tensiunilor. Supratensiuni

Din (4.86), (4.95), (4.106) se obține că:

$$i = I_{S_0} \cos(\omega t) = \frac{e}{R} \quad (4.109)$$

Cum $e = E \cos \omega t = R i = u_R + u_L + u_C = R i + u_L + u_C$

la rezonanță rezultă că:

$$u_L + u_C = 0; u_L = -u_C \quad (4.110)$$

Din (4.89), (4.91) amplitudinile tensiunilor pe condensator, respectiv bobină au expresiile:

$$U_{C_S} = \frac{E}{R} \frac{1}{\omega_{S_0} C} = I_{S_0} \frac{1}{\omega_{S_0} C} = I_{S_0} X_{C_S} \quad (4.111)$$

$$U_{L_S} = \frac{E}{R} \omega_{S_0} L = I_{S_0} \omega_{S_0} L = I_{S_0} X_{L_S} \quad (4.112)$$

iar expresiile instantanee sunt:

$$\begin{cases} u_C(t) = U_{C_S} \sin \omega t \\ u_L(t) = -U_{L_S} \sin \omega t \end{cases} \quad (4.113)$$

La rezonanță, tensiunile de la bornele condensatorului și bobinei sunt egale ca mărime, însă variază în antifază.

Comparând tensiunea dezvoltată la bornele condensatorului și bobinei cu cea a sursei de excitație se obține:

$$U_{C_s} = U_{L_s} = QE \quad (4.114)$$

unde

$$Q = \frac{\omega_{s_0} L}{R} = \frac{1}{R \omega_{s_0} C} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{Z_C}{R} \quad (4.115)$$

este factorul de calitate al circuitului R.L.C. serie. Se consideră că circuitele oscilante sunt de calitate în cazul în care $Q \geq 100$.

Factorul de calitate al circuitului este o mărime măsurabilă (este un număr) ce poate fi dedus măsurând amplitudinea tensiunilor pe elementele reactive, la rezonanță.

Din (4.114) se obține că:

$$Q = \frac{U_{L_s}}{E} = \frac{U_{C_s}}{E} \quad (4.116)$$

Diagrama liniară (forma de undă) a tensiunilor din C.O.S. serie la rezonanță este reprezentată în figura 4.26.

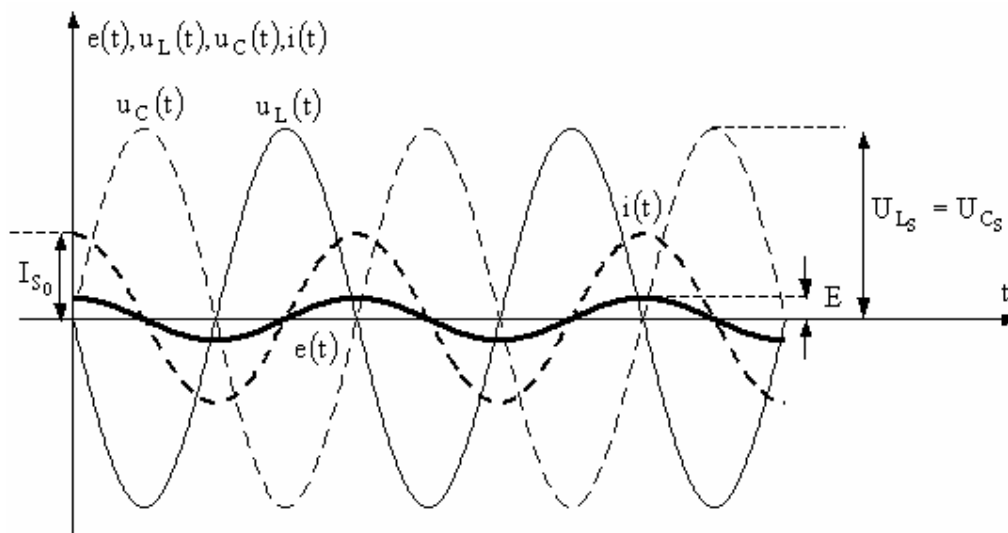


Fig.4.26.Variația tensiunilor din C.O.S. în cazul rezonanței

Observație:

➤ Amplitudinile tensiunilor la bornele bobinei și a condensatorului sunt mult mai mari decât amplitudinea excitației (fenomenul de supratensiuni), putând spune că la rezonanță C.O.S. “amplifică” de Q – ori tensiunea sursei de la bornele lui.

Important

➤ Amplitudinile tensiunilor pe bobină, respectiv condensator nu au valoarea maximă la rezonanță. Valorile maxime ale amplitudinilor acestor tensiuni se calculează pornind de la expresiile (4.89), respectiv (4.91), astfel:

Conform (4.89)

$$U_C = \frac{E}{\sqrt{(\omega RC)^2 + (\omega^2 LC - 1)^2}}$$

Pulsăția la care tensiunea pe condensator este maximă rezultă în urma rezolvării ecuației:

$$\frac{dU_C}{d\omega} = 0 \Rightarrow 2\omega(RC)^2 + 4\omega LC(\omega^2 LC - 1) = 0 \Rightarrow \omega^2 = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}$$

Conform (4.115) se poate scrie că pulsăția la care tensiune pe condensator este maximă are expresia:

$$\omega_C = \frac{R}{L} \sqrt{Q^2 - \frac{1}{2}} = \omega_{S_0} \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \quad (4.117)$$

Valoarea maximă a amplitudinii tensiunii de pe condensator are expresia:

$$|U_C(\omega_C)| = U_{C_{\max}} = \frac{QE}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} = \frac{U_{C_S}}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} \quad (4.118)$$

Conform (4.91)

$$U_L = \frac{E}{\sqrt{(\omega RC)^2 + (\omega^2 LC - 1)^2}} \omega^2 LC$$

Pulsăția la care tensiunea pe bobină este maximă rezultă în urma rezolvării ecuației:

$$\frac{dU_L}{d\omega} = 0 \Rightarrow 2\omega \sqrt{(\omega RC)^2 + (\omega^2 LC - 1)^2} - \omega^2 \frac{2\omega R^2 C^2 + 4\omega LC(\omega^2 LC - 1)}{2\sqrt{(\omega RC)^2 + (\omega^2 LC - 1)^2}} = 0 \Rightarrow$$

$$\omega^2 = \frac{1}{LC - \frac{R^2 C^2}{2}}$$

Conform (4.115) se poate scrie că pulsăția la care tensiune pe bobină este maximă are expresia:

$$\omega_L = \frac{1}{RC \sqrt{Q^2 - \frac{1}{2}}} = \frac{\omega_{S_0}}{\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}} \quad (4.119)$$

Valoarea maximă a amplitudinii tensiunii de pe bobină are expresia:

$$|U_L(\omega_L)| = U_{L_{\max}} = \frac{QE}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} = \frac{U_{L_S}}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} \quad (4.120)$$

Observații:

$$\triangleright \omega_C \leq \omega_S \leq \omega_L \quad (4.121)$$

$$\triangleright U_{L_{\max}} = U_{C_{\max}} \geq U_{L_S} = U_{C_S} \quad (4.122)$$

\triangleright Cum în realitate circuitele oscilante au un factor de calitate foarte bun, se pot face următoarele aproximări:

$$\omega_C = \omega_L = \omega_{S_0} = \omega_0 ; U_{L_{\max}} = U_{C_{\max}} = QE \quad (4.123)$$

În figura 4.27 este prezentat modul de variație funcție de frecvență a amplitudinilor tensiunilor de pe condensator, respectiv bobină.

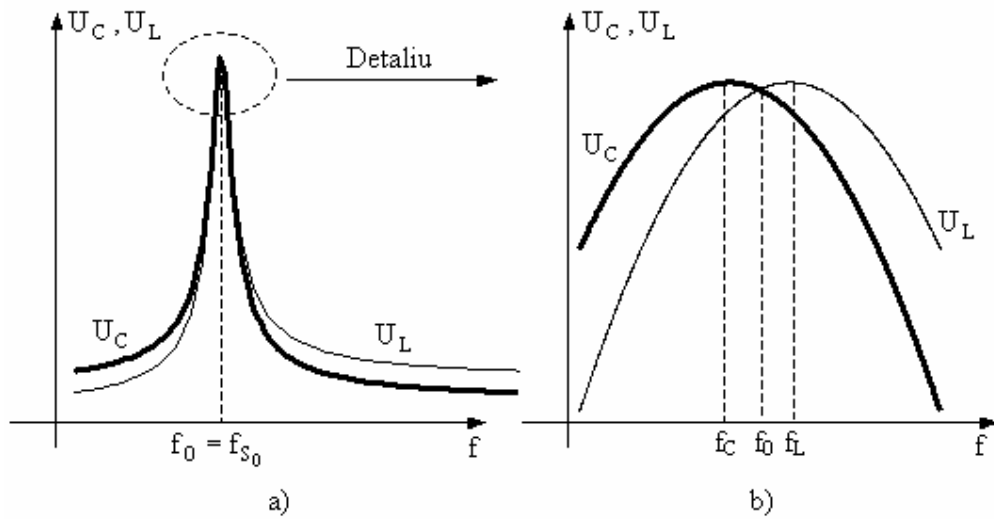


Fig.4.27 Variația funcție de frecvență a amplitudinilor tensiunilor de pe condensator, respectiv bobină: a) într-un domeniu larg de frecvențe; b) detaliu într-un domeniu îngust de frecvențe în jurul lui f_{S_0}

În figura 4.27a) se observă că tensiunile de pe bobină (condensator) ating valoarea maximă, practic, la rezonanță. În detaliul din figura 4.27b) se observă că $f_C(\omega_C)$, respectiv $f_L(\omega_L)$ diferă de valoarea frecvenței de rezonanță. Diferențele sunt ne semnificative în raport cu valorile frecvenței de rezonanță.

Conform (4.117), respectiv (4.119) se definesc erorile relative:

$$\varepsilon_{r\omega C} = \frac{|\omega_C - \omega_{S_0}|}{\omega_{S_0}} \cdot 100 = \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}\right) \cdot 100 [\%] \quad (4.124)$$

$$\varepsilon_{r\omega L} = \frac{|\omega_L - \omega_{S_0}|}{\omega_{S_0}} \cdot 100 = \frac{\left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}\right)}{\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}} \cdot 100 [\%] \quad (4.125)$$

Eroarea relativă a tensiunii maxime de pe bobină (condensator) față de tensiunea obținută la rezonanță este definită astfel:

$$\varepsilon_{rU} = \frac{|U_{L\max} - U_{L_S}|}{U_{L_S}} \cdot 100 = \frac{\left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}\right)}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} \cdot 100 [\%] \quad (4.126)$$

Exemplu:

pentru $Q = 10$ rezultă că: $\varepsilon_{r\omega C} = 0.25031 [\%]$; $\varepsilon_{r\omega L} = 0.25094 [\%]$; $\varepsilon_{rU} = 0.12523 [\%]$

pentru $Q = 100$ rezultă că: $\varepsilon_{r\omega C} = 2.5 \cdot 10^{-3} [\%]$; $\varepsilon_{r\omega L} = 2.5 \cdot 10^{-3} [\%]$; $\varepsilon_{rU} = 1.25 \cdot 10^{-3} [\%]$

4.2.4.4. Curba de rezonanță

Caracteristica de frecvență

Reprezentarea grafică a dependenței modulului impedanței în funcție de frecvența semnalului de excitație: $Z_S = Z_S(f)$ sau $Z_S = Z_S(\omega)$ - vezi figura 4.28.

Curba de rezonanță

Reprezentarea grafică a dependenței amplitudinii curentului din circuit funcție de frecvența semnalului de excitație: $I = I(f)$ sau $I = I(\omega)$ - vezi figura 4.29.

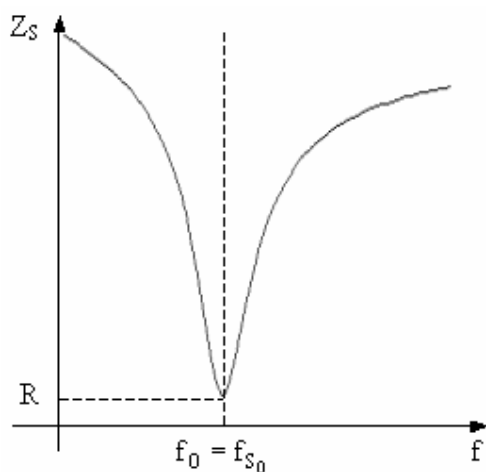


Fig.4.28 Caracteristica de frecvență

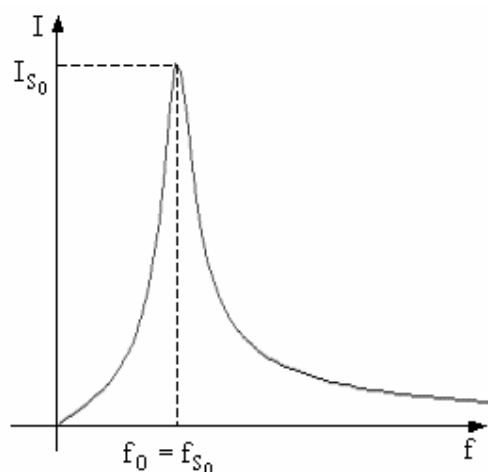


Fig.4.29 Curba de rezonanță

Important:

➤ C.O.S. prezintă într-o bandă îngustă de frecvențe o impedanță mică (minimă), respectiv o valoare mare (maximă) a curentului.

În mod curent curba de rezonanță este reprezentată și funcție de dezacordul relativ β al circuitului $I = I(\beta)$ - vezi figura 4.30, unde dezacordul relativ este definit astfel:

$$\beta = \frac{\omega}{\omega_{S_0}} - \frac{\omega_{S_0}}{\omega} = \frac{f}{f_{S_0}} - \frac{f_{S_0}}{f} \quad (4.127)$$

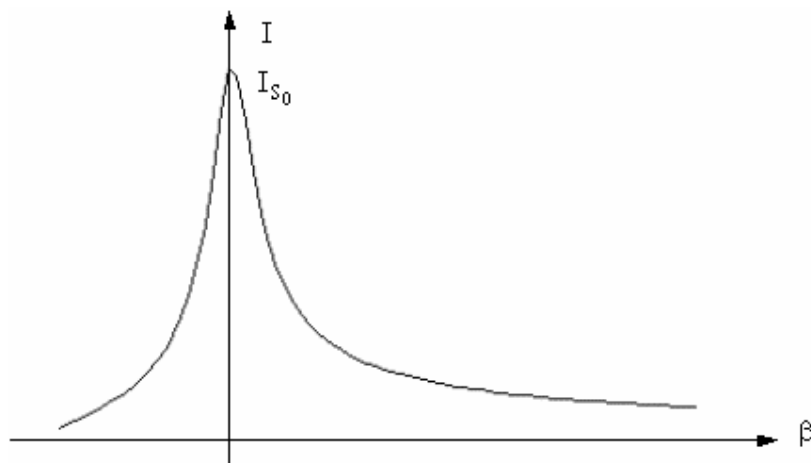


Fig.4.30 Curba de rezonanță a C.O.S. funcție de dezacordul relativ

În conformitate cu definiția dată dezacordului relativ, se pot scrie expresiile ce definesc funcționarea C.OS., astfel:

➤ Reactanța circuitului:

$$X = \omega L - \frac{1}{\omega C} = L \left(\omega - \frac{1}{\omega LC} \right) = L \left(\omega - \frac{\omega_{S_0}^2}{\omega} \right) = L \omega_{S_0} \left(\frac{\omega}{\omega_{S_0}} - \frac{\omega_{S_0}}{\omega} \right) = \beta L \omega_{S_0} \quad (4.128)$$

➤ Impedanța circuitului:

$$\underline{Z}_S = R + jX = R + j\beta L \omega_{S_0} = R \left(1 + j\beta \frac{L \omega_{S_0}}{R} \right) = R (1 + j\beta Q) \quad (4.129)$$

➤ Modulul impedanței circuitului:

$$Z_S = \sqrt{R^2 + X^2} = R \sqrt{1 + (\beta Q)^2} \quad (4.130)$$

➤ Amplitudinea curentului:

$$I = \frac{E}{Z_S} = \frac{E}{R \sqrt{1 + (\beta Q)^2}} \quad (4.131)$$

➤ Defazajul dintre curent și tensiune:

$$\varphi = \arctg \left(\frac{X}{R} \right) = \arctg (\beta Q) \quad (4.132)$$

Pentru (4.128)...(4.132) se pot calcula expresii aproximative, care se determină pentru două cazuri distincte:

a) în domeniul de frecvențe apropiat de rezonanță $\omega \approx \omega_0 = \omega_{S_0}$;

Expresia dezacordului relativ devine:

$$\beta = \frac{\omega}{\omega_{S_0}} - \frac{\omega_{S_0}}{\omega} = \frac{(\omega + \omega_{S_0})(\omega - \omega_{S_0})}{\omega \omega_{S_0}} \approx \frac{2\omega_{S_0}(\Delta\omega)}{\omega_{S_0}^2} \approx \frac{2(\Delta\omega)}{\omega_{S_0}} = \frac{2(\Delta f)}{f_{S_0}} \quad (4.133)$$

și în acest caz:

$$\text{➤ } X \approx 2L(\Delta\omega) \quad (4.134)$$

$$\text{➤ } Z_S \approx R \sqrt{1 + 4Q^2 \left(\frac{\Delta f}{f_{S_0}} \right)^2} \quad (4.135)$$

$$\text{➤ } \varphi = \arctg \left(\frac{2Q}{f_{S_0}} \Delta f \right) \quad (4.136)$$

b) în domeniul de frecvențe îndepărtat de rezonanță $\omega \gg \omega_{S_0}$;

Expresia dezacordului relativ este următoarea:

$$\beta = \frac{\omega}{\omega_{S_0}} - \frac{\omega_{S_0}}{\omega} = \frac{\omega}{\omega_{S_0}} \left[1 - \left(\frac{\omega_{S_0}}{\omega} \right)^2 \right] \approx \frac{\omega}{\omega_{S_0}} \gg 1$$

(4.137)

și cum $\beta Q \gg 1$ rezultă că:

$$Z_S \approx \beta QR \quad (4.138)$$

$$\varphi = \arctg(\beta Q) \quad (4.139)$$

Concluzie:

- La frecvențe îndepărtate de rezonanță impedanța circuitului variază practic liniar cu dezacordul relativ;
- Comportarea circuitelor oscilante în majoritatea aplicațiilor prezintă interes doar în jurul frecvenței de rezonanță: $f_{s_0} \pm 5\%$;
- Forma caracteristicii de frecvență pune în evidență calitatea de selectivitate a C.O.S.;

4.2.5. Selectivitatea C.O.S.

4.2.5.1. Ecuația curbei de selectivitate

Curba de rezonanță arată că circuitul se comportă - în domeniul de frecvență apropiat de rezonanță - ca un filtru. Eficacitatea de filtrare a curenților și tensiunilor, după frecvență se numește selectivitate și se apreciază astfel:

- prin raportul dintre amplitudinea curentului din circuit, la frecvența oarecare f , și amplitudinea curentului la rezonanță – selectivitate în curent - $s_I = s_I(\omega) = s_I(f)$

$$s_I = \frac{I}{I_{S_0}} \Big|_{E=\text{const.}} \quad (4.140)$$

- prin raportul dintre amplitudinea tensiunii la bornele bobinei, la frecvența oarecare f , și amplitudinea aceleiași tensiuni, la rezonanță – selectivitate în tensiune - $s_U = s_U(\omega) = s_U(f)$

$$s_U = \frac{U}{U_{L_S}} \Big|_{E=\text{const.}} \quad (4.141)$$

Observație:

- Circuitul serie fiind un “amplificator de tensiune”, principala lui caracteristică este “curba de răspuns” în tensiune $U_L = U_L(f)$ și nu curba de răspuns în curent $I = I(f)$.

Din această cauză principalul parametru îl constituie selectivitatea în tensiune s_U și nu selectivitate în curent s_I . În apropierea frecvenței de rezonanță cele două curbe de selectivitate se vor suprapune:

$$s_U = \frac{U}{U_{L_S}} \approx \frac{L\omega I}{L\omega_{S_0} I_{S_0}} = \frac{\omega}{\omega_{S_0}} \frac{I}{I_{S_0}} = \frac{\omega}{\omega_{S_0}} s_I \approx s_I \quad (4.142)$$

Ecuația curbei de selectivitate $s = s(\omega) = s(f)$ se deduce din ecuația curbei de rezonanță a circuitului:

$$s = \frac{I}{I_{S_0}} = \frac{\frac{E}{Z_S}}{\frac{E}{Z_{S_0}}} = \frac{Z_{S_0}}{Z_S} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\beta Q)^2}} \quad (4.143)$$

Observație:

- În domeniul de frecvențe apropiat de rezonanță $\omega \approx \omega_{s_0}$, $\beta \approx \frac{2(\Delta f)}{f_{s_0}}$;

$$s \approx \frac{1}{\sqrt{1 + 4Q^2 \left(\frac{\Delta f}{f_{s_0}} \right)^2}} \quad (4.144)$$

- În domeniul de frecvențe îndepărtat de rezonanță $\omega \gg \omega_{s_0}$, $\beta \approx \frac{\omega}{\omega_{s_0}}$, $\beta Q \gg 1$;

$$s \approx \frac{1}{\beta Q} \quad (4.145)$$

Selectivitatea circuitului serie depinde de:

- factorul de calitate Q al circuitului;
- dezacordul relativ al frecvenței β , nu de simpla deviație a frecvenței;

4.2.5.2. Expresia logaritmică a selectivității. Atenuarea.

Din cauza marilor variații ale selectivității cu frecvența, precizia reprezentării grafice a curbei de selectivitate este nesatisfăcătoare la scala obișnuită, adoptându-se în acest caz reprezentarea logaritmică.

Observație:

➤ În acustică, **variația minimă** de intensitate sonoră, perceptibilă pentru o ureche normală – mijlocie, fără încordarea atenției, este de 25,9 %, corespunzătoare unui raport de energii sau puteri acustice:

$$\frac{W_1}{W_2} = \frac{P_1}{P_2} = 1,259 \quad (4.146)$$

În acustică s-a adoptat acest raport ca unitate de măsurare a nivelelor sonore din următoarele motive:

- valoarea raportului pusă sub forma $1,259 = 10^{0,1}$ este o expresie comod de mînuit în calcule;
- corespunde în mod natural legii fiziologice generale ale lui Weber – Fechner: ”Intensitatea senzației crește cu logaritmul excitației”.

Observație:

➤ Gama de variație a intensităților sonore fiind de **1.000/1** într-o conversație obișnuită, și de **100.000/1** într-o orchestră simfonică, adoptarea unităților logaritmice este indicată în telecomunicații. Ulterior această unitate de măsură a fost adoptată în toate domeniile tehnicii.

Definiție:

➤ Unitatea logaritmică de măsurare a rapoartelor de puteri electrice este “decibelul” – logaritmul zecimal al raportului unitate:

$$\lg \frac{P_1}{P_2} = 0,1 \lg 10 = 0,1 \quad (4.147)$$

unde P_1 – puterea de la intrarea circuitului, P_2 – puterea de la ieșirea circuitului;

Numărul de decibeli corespunzător unui raport oarecare de puteri $\frac{P_1}{P_2}$ se calculează cu relația:

$$X = 10 \lg \frac{P_1}{P_2} \text{ [dB]} \quad (4.148)$$

În domeniul mărimilor electrice, pentru a defini în dB raportul logaritmic a două tensiuni sau curenți se utilizează relația:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{U_1 I_1}{U_2 I_2}$$

Dacă cele două tensiuni U_1 și U_2 se aplică succesiv aceleași rezistențe (impedanțe), sau simultan la două rezistențe (impedanțe) identice, în care se produc curenții I_1 și I_2 ,

$$\text{atunci: } \frac{P_1}{P_2} = \frac{U_1 I_1}{U_2 I_2} = \frac{\frac{U_1^2}{R}}{\frac{U_2^2}{R}} = \left(\frac{U_1}{U_2} \right)^2 \text{ sau } \frac{P_1}{P_2} = \frac{U_1 I_1}{U_2 I_2} = \frac{R I_1^2}{R I_2^2} = \left(\frac{I_1}{I_2} \right)^2$$

și din (4.138) se obține:

$$X = 10 \lg \frac{P_1}{P_2} = 20 \lg \frac{U_1}{U_2} = 20 \lg \frac{I_1}{I_2} \text{ [dB]} \quad (4.149)$$

Concluzie:

➤ La un număr dat de decibeli raportul puterilor corespunde cu pătratul raporturilor tensiunilor respectiv curenților, ca în tabelul 4.2.1.

Tab 4.2.1.

Correspondența dintre un număr dat de db și raportul puterilor și al raportului tensiunilor respectiv curenților.

$\frac{P_1}{P_2}$	1,259	1,585	2,512	3,162	3,981	5,012	6,310	7,943	10	100
X [dB]	1	2	4	5	6	7	8	9	10	20
$\frac{U_1}{U_2}, \frac{I_1}{I_2}$	1,122	1,259	1,585	1,778	1,995	2,239	2,512	2,818	3,162	10

Exemple:

1. Puterea de intrare într-un amplificator este $P_i = 0,1 \text{ mW}$, iar cea de ieșire este $P_o = 1 \text{ W}$. Amplificarea în putere exprimată în dB va fi:

$$A_p = 10 \lg \frac{P_o}{P_i} = 10 \lg \frac{1 \text{ W}}{10^{-4} \text{ W}} = 40 \text{ dB}$$

2. Dacă tensiunea de intrare este $U_i = 10 \text{ mV}$, iar cea de ieșire este $U_o = 10 \text{ V}$ amplificarea de tensiune va fi:

$$A_u = 20 \lg \frac{U_o}{U_i} = 20 \lg \frac{10 \text{ V}}{10^{-2} \text{ V}} = 60 \text{ dB}$$

3. Unele circuite atenuază semnalele. Astfel dacă, de pildă, la intrarea într-o linie telefonică urbană tensiunea are valoarea de 0,7 V și la ieșirea din linie tensiunea este de 0,07 V, atenuarea în dB va fi:

$$K = 20 \lg \frac{U_0}{U_i} = 20 \lg \frac{0,07 \text{ V}}{0,7 \text{ V}} = -20 \text{ dB}$$

Observație:

➤ În tehnică se folosește încă o unitate logaritmică de măsurare a raportului de puteri neperul. Numărul de neperi corespunzător unui raport oarecare de puteri $\frac{P_1}{P_2}$ se calculează

cu relația:

$$X = \ln \frac{P_1}{P_2} = 2,3 \lg \frac{P_1}{P_2} \text{ [Np]} \quad (1.150)$$

Correspondența dintre cele două unități de măsurare este următoarea:

$$\begin{aligned} 1 \text{ Np} &= 8,686 \text{ dB} \\ 1 \text{ dB} &= 0,1151 \text{ Np} \end{aligned} \quad (1.151)$$

Definiție:

➤ Atenuarea circuitului – a – la frecvența f este reprezentată de expresia:

$$a = \lg \frac{P_0}{P} = \lg \frac{R I_0^2}{R I^2} = 2 \lg \frac{I_0}{I} = 2 \lg \frac{1}{s} \text{ [B]} \quad (4.152)$$

$$a = 20 \lg \frac{1}{s} \text{ [dB]} \quad (4.153)$$

Correspondența dintre atenuare și selectivitate este dat în tabelul 4.2.2.

Tab 4.2.2.
Correspondența dintre atenuare și selectivitate

s	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{50}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{10000}$
a [dB]	0	3	6	12	20	26	29,5	33,4	40	60	80

4.2.5.3. Banda de trecere

Deoarece atât procesul de emisie cât și cel de recepție al energiei electromagnetice necesită un spectru de frecvențe grupat simetric în jurul frecvenței de bază, circuitele oscilante trebuie să asigure o trecere cât mai uniformă a întregului spectru de frecvență.

Datorită selectivității circuitelor oscilante componentele spectrului întâmpină “rezistențe” diferite la trecerea prin montaj, frecvențele mărginașe fiind dezavantajate față de cele centrale. Întrucât aportul de energie al fiecărei componente este proporțional cu pătratul amplitudinii curentului, curba de rezonanță schimbă repartiția inițială a energiei spectrului, redistribuind-o altfel.

S-a convenit să se adopte ca “banda de trecere” să fie spectrul de frecvențe format din componentele a căror putere electrică este minimum 50 % din puterea componentei centrale ce are frecvența de rezonanță.

Potrivit acestei convenții, lărgimea “benzii de trecere” – B – este condiționată de relația:

$$\frac{P}{P_0} = 0,5; \quad \frac{R I^2}{R I_{S_0}^2} = 0,5; \quad \frac{I}{I_{S_0}} = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad (4.154)$$

În acest caz banda corespunde unei selectivități – nivel standard – este egală cu:

$$s = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad a = 3\text{dB}; \quad \frac{1}{\sqrt{1+(\beta Q)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.707; \quad \beta Q = \pm 1 \quad (4.155)$$

Determinarea benzii de trecere (la o atenuare $a=3\text{dB}$) – $B_{3\text{dB}}$ – se poate realiza prin două metode:

1. Grafic

Banda de frecvență în limitele căreia curentul prin circuit are valoarea mai mare sau cel puțin egală cu 0,707 din valoarea la rezonanță se numește bandă de trecere.

Determinarea grafică se obține prin intersecția curbei de rezonanță cu dreapta $I = 0.707 I_{S_0}$ – vezi figura 4.31.

$$B_{3\text{dB}} = f_2 - f_1 \quad (4.156)$$

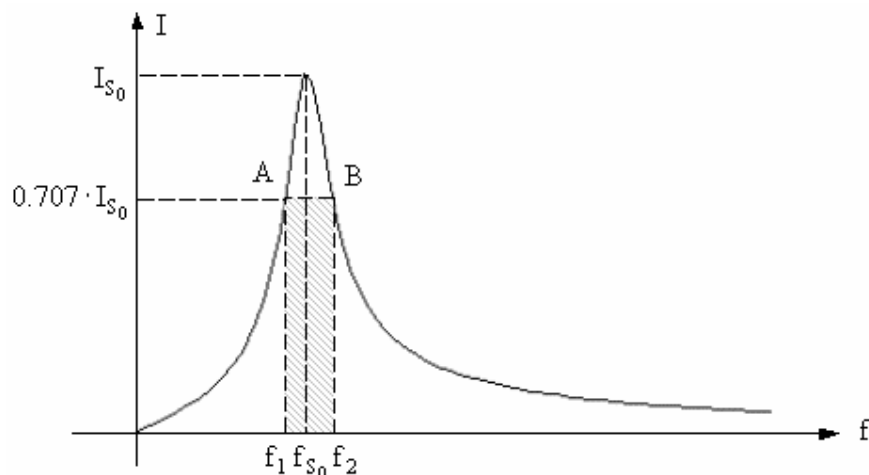


Fig.4.31 Determinarea grafică a benzii de frecvență la o atenuare de 3dB

2. Analitic

În intervalul îngust de frecvență $f_2 - f_1$ curba de rezonanță se consideră simetrică.

În punctele limită A, respectiv B ale benzii de trecere se pot scrie următoarele relații:

➤ conform (4.155), cum $I(f_A) = I(f_B) = 0.707 I_{S_0}$, rezultă că:

$$\beta Q = \pm 1 \Rightarrow \frac{\beta L \omega_{S_0}}{R} = \pm 1 \Rightarrow \beta L \omega_{S_0} = \pm R \Rightarrow X = \pm R \quad (4.157)$$

În punctele de extrem al benzii (de 3 dB) modulul inductanței este egal cu rezistența de pierderi.

➤ conform (4.132) se obține că:

$$\varphi = \pm 45^\circ \quad (4.158)$$

➤ conform (4.128) se obține că:

$$\begin{cases} X_A = \omega_1 L - \frac{1}{\omega_1 C} = \beta_1 L \omega_{S_0} \\ X_B = \omega_2 L - \frac{1}{\omega_2 C} = \beta_2 L \omega_{S_0} \end{cases} \quad (4.159)$$

Din (4.157) și (4.159) rezultă că:

$$\begin{cases} R = \beta_1 L \omega_{S_0} \\ R = \beta_2 L \omega_{S_0} \end{cases} \Rightarrow 2R = (\beta_1 + \beta_2) L \omega_{S_0}$$

Deoarece banda este îngustă (lucrându-se într-un domeniu de frecvențe apropiat de rezonanță) conform (4.133) rezultă că:

$$\begin{aligned} 2R &= \left(\frac{2(\Delta f_1)}{f_{S_0}} + \frac{2(\Delta f_2)}{f_{S_0}} \right) L \omega_0 \Rightarrow R f_{S_0} = [(\Delta f_1) + (\Delta f_2)] L \omega_{S_0} \Rightarrow \\ f_{S_0} &= \left[(f_{S_0} - f_1) + (f_2 - f_{S_0}) \right] Q \Rightarrow f_{S_0} = [f_2 - f_1] Q \end{aligned}$$

iar în final

$$B_{3dB} = \frac{f_{S_0}}{Q} \quad (4.160)$$

Observație:

➤ Formula (4.160) de determinare a lărgimii de bandă este valabilă doar la atenuarea de 3dB, corespunzătoare unei selectivități $s = 0.707$.

În cazul general pentru o selectivitate oarecare -s- căreia îi corespunde un dezacord $(\beta Q)_s$ expresia lărgimii de bandă - B_s - este dată de expresia:

$$B_s = (\beta Q)_s \cdot B_{3dB} \quad (4.161)$$

unde B_{3dB} este lărgimea de bandă calculată pentru o selectivitate $s = 0.707$.

Demonstrație:

$$\text{Conform (4.143)} \quad \beta Q = \pm \frac{\sqrt{1-s^2}}{s^2} \quad (4.162)$$

în punctele de extrem ale benzii de trecere se poate scrie că:

$$\begin{cases} X_A = -R \frac{\sqrt{1-s^2}}{s^2} \\ X_B = R \frac{\sqrt{1-s^2}}{s^2} \end{cases} \quad (4.163)$$

Se reamintește că punctul A este poziționat la frecvența inferioară f_1 , iar punctul B la frecvența superioară f_2 a benzii de trecere. Deoarece se lucrează în jurul frecvenței de rezonanță, conform (4.133) și (4.159) rezultă că:

$$\begin{cases} X_A = \omega_1 L - \frac{1}{\omega_1 C} = \beta_1 L \omega_{S_0} \approx -\frac{2(\Delta f_1)}{f_{S_0}} L \omega_{S_0} \\ X_B = \omega_2 L - \frac{1}{\omega_2 C} = \beta_2 L \omega_{S_0} \approx \frac{2(\Delta f_2)}{f_{S_0}} L \omega_{S_0} \end{cases} \quad (4.164)$$

Din (4.163) și (4.164) se scrie că:

$$\begin{cases} R = \frac{s}{\sqrt{1-s^2}} \frac{2(\Delta f_1)}{f_{S_0}} L \omega_{S_0} \\ R = \frac{s}{\sqrt{1-s^2}} \frac{2(\Delta f_2)}{f_{S_0}} L \omega_{S_0} \end{cases} \xrightarrow{\text{adunare}} R = \frac{s}{\sqrt{1-s^2}} \frac{(f_2 - f_1)}{f_{S_0}} L \omega_{S_0} \Rightarrow$$

$$B_S = f_2 - f_1 = \frac{\sqrt{1-s^2}}{s} f_{S_0} \frac{R}{L \omega_{S_0}} = (\beta Q)_S \cdot \frac{f_{S_0}}{Q} = (\beta Q)_S \cdot B_{3dB}$$

Observație:

➤ În unele cazuri se folosește “banda de trecere” definită la selectivitatea $s = \frac{1}{2}$ (corespunzătoare unei atenuări $a = 6\text{dB}$).

$$\text{➤ } B_{6dB} = \sqrt{3} \frac{f_S}{Q} = \sqrt{3} B_{3dB} \quad (4.165)$$

Pentru a modifica banda de frecvență a circuitului, fără a-i modifica frecvența de rezonanță trebuie să se intervină asupra factorului de calitate Q al circuitului. Acest lucru (fără a modifica valoarea bobinei sau a condensatorului) se realizează prin introducerea în serie cu bobina și condensatorul a unui rezistor R_1 .

În acest caz noul factor de calitate al circuitului are următoarea expresie:

$$Q' = \frac{1}{R + R_1} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (4.166)$$

Cum factorul de calitate al circuitului scade, lărgimea de bandă a circuitului crește, devenind mai puțin selectiv – vezi figura 4.32.

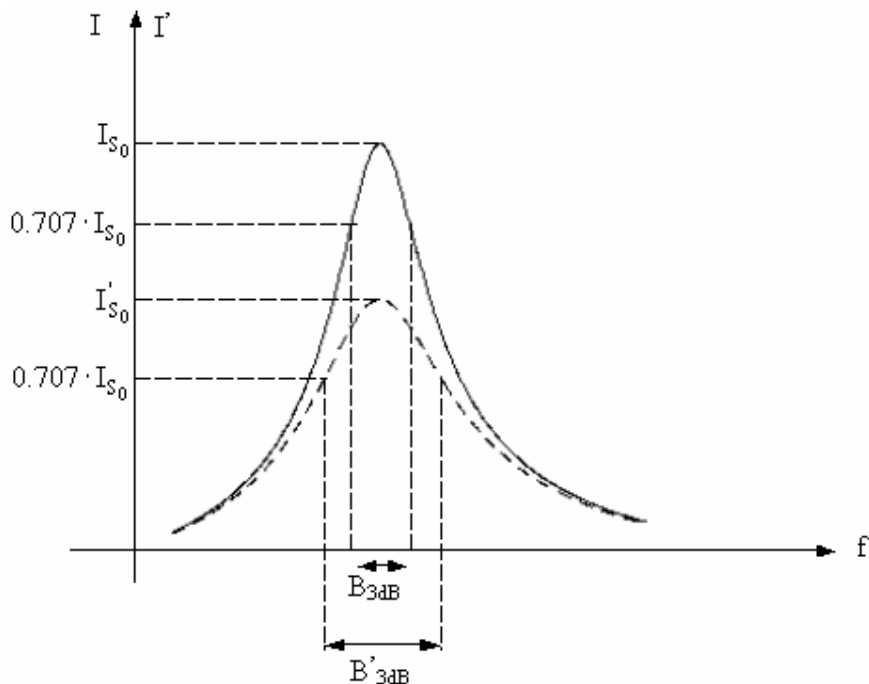
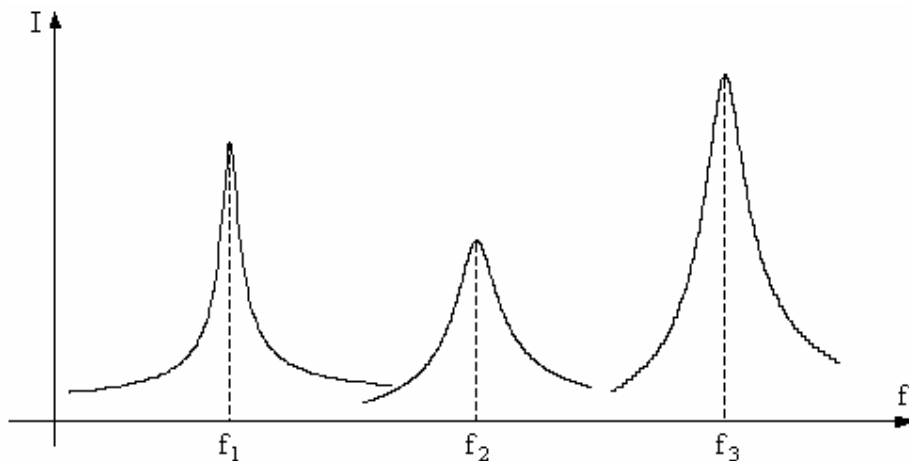


Fig.4.32 Comparație între lărgimea benzilor de 3dB pentru două circuite oscilante ce au aceeași frecvență de rezonanță (L și C identice), dar factor de calitate diferit

4.2.6. Curba universală de rezonanță

Caracteristica fundamentală a circuitelor oscilante fiind selectivitatea, ea constituie principalul criteriu în alegerea lor. În acest scop se compară curbele de selectivitate ale mai multor circuite, alegându-l pe acela care asigură selectivitatea necesară. Compararea directă a curbelor de rezonanță, prezentată în figura 4.33, este greoaie, atât din cauza răspândirii lor în lungul axei cât și din cauza inegalității maximelor.



4.33 Curbele de rezonanță a trei C.O.S. de diferite calități și frecvențe de rezonanță

O comparație mai ușor de făcut între circuite, din punct de vedere al selectivității se realizează pornind de la următoarele considerente:

➤ reprezentarea grafică se realizează funcție de deviația relativă de frecvență $\frac{\beta}{2} \approx \frac{\Delta f}{f_{s_0}}$;

➤ conform (4.123) se poate afirma că variația în funcție de frecvență a amplitudinii tensiunii de pe bobină (condensator) este identică cu curba de rezonanță a circuitului.

În consecință se vor reprezenta grafic variațiile $\frac{U_L}{E} = f\left(\frac{\beta}{2}\right)$;

Din (4.91) se scrie că $U_L = \omega L \frac{E}{Z_S}$.

Deoarece reprezentările grafice se realizează în domeniul de frecvențe apropiat de rezonanță, conform (4.135) rezultă că:

$$\frac{U_L}{E} = \frac{\omega L}{Z_S} = \frac{\omega L}{R \sqrt{1 + 4Q^2 \left(\frac{\Delta f}{f_{s_0}}\right)^2}} = \frac{\omega L}{R \sqrt{1 + (\beta Q)^2}} \approx \frac{\omega_{s_0} L}{R \sqrt{1 + (\beta Q)^2}} \Rightarrow$$

$$\frac{U_L}{E} = \frac{Q}{\sqrt{1 + (\beta Q)^2}} \quad (4.167)$$

În figura 4.34 este reprezentată $\frac{U_L}{E} = f\left(\frac{\beta}{2}\right)$ pentru C.O.S. cu diverse valori ale factorului de calitate.

Observație:

➤ În reprezentarea $\frac{U_L}{E} = f\left(\frac{\beta}{2}\right)$ coincid axele de simetrie ale curbelor, nu însă și extremele lor.

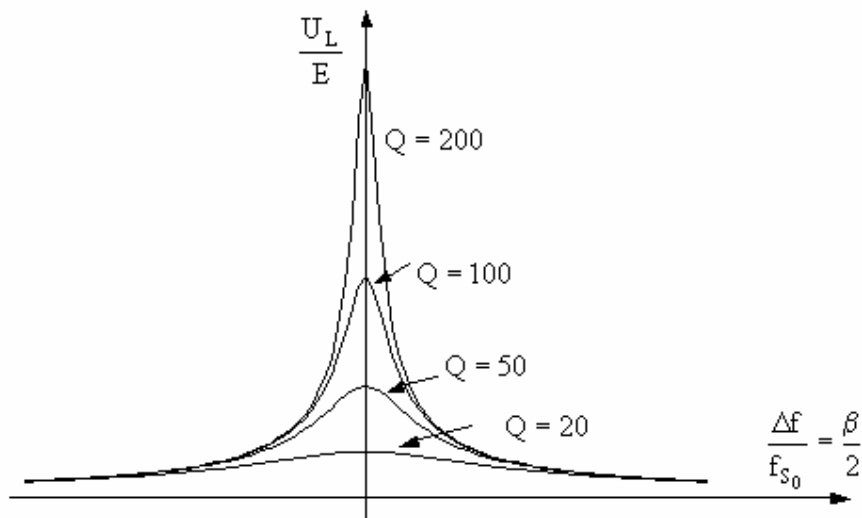


Fig.4.34 Reprezentarea curbelor de rezonanță la scări relative pentru patru C.O.S.

Pentru ca să fie și mai simplă comparația între C.O.S. se va reprezenta curba de selectivitate a acestor circuite. Conform (4.143) selectivitatea are expresia: $s = \frac{1}{\sqrt{1+(\beta Q)^2}}$.

În figura 4.35 este reprezentată $s = s(\beta)$ pentru aceleași circuite a căror curbă de rezonanță a fost reprezentată în figura 4.34.

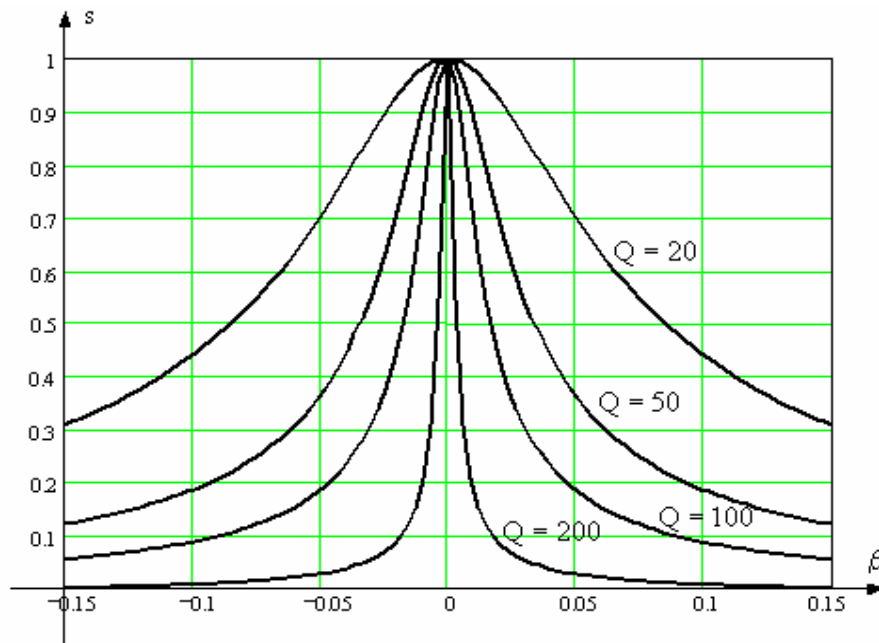


Fig.4.35 Reprezentarea curbelor de selectivitate pentru patru C.O.S.

Observație:

➤ În reprezentarea $s = s(\beta)$ coincid atât axele de simetrie cât și extremele curbelor.

Dacă se adoptă ca variabilă independentă produsul βQ , numit dezacord generalizat, curbele de selectivitate reprezentate în figura 4.35 se suprapun.

Conform (4.132) $\varphi = \arctg(\beta Q)$ expresia selectivității devine:

$$s = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \varphi}} = \cos \varphi \quad (4.168)$$

Definiție:

➤ Curba de selectivitate (4.168), independentă de orice parametru electric $\left(f_{s_0}, Q, \frac{L}{C}, \dots\right)$ se numește curba universală de rezonanță a C.O.S - vezi figura 4.36. Din curba universală de rezonanță se poate deduce curba de rezonanță a oricărui C.O.S. dacă se cunoaște factorul de calitate, Q sau frecvența de rezonanță f_{s_0} .

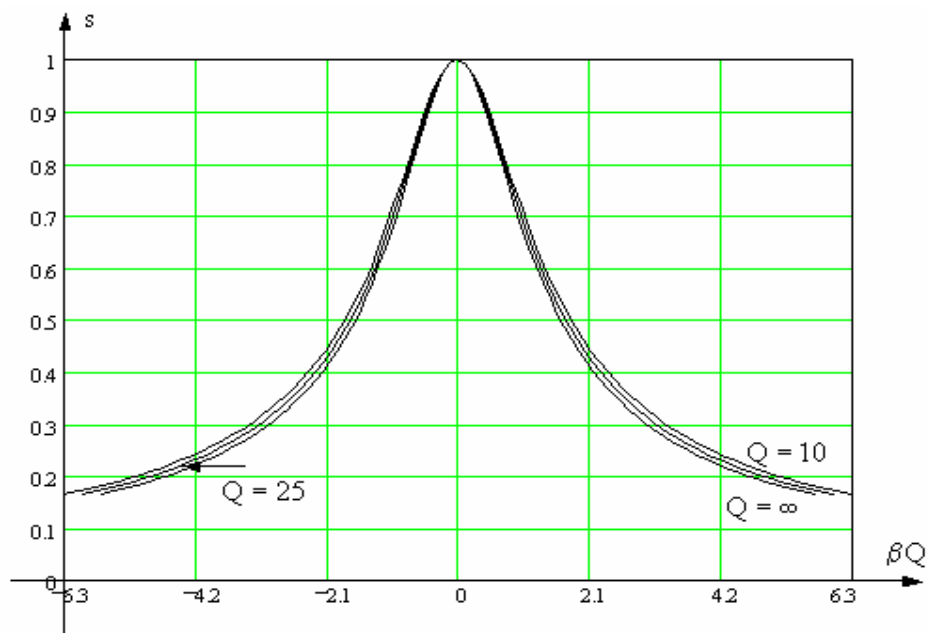


Fig.4.36 Curba universală de rezonanță a C.O.S.

➤ Defazajul (4.132) dintre curent și tensiune $\varphi = \arctg(\beta Q)$ se numește caracteristica universală de fază a C.O.S. - vezi figura 4.37.

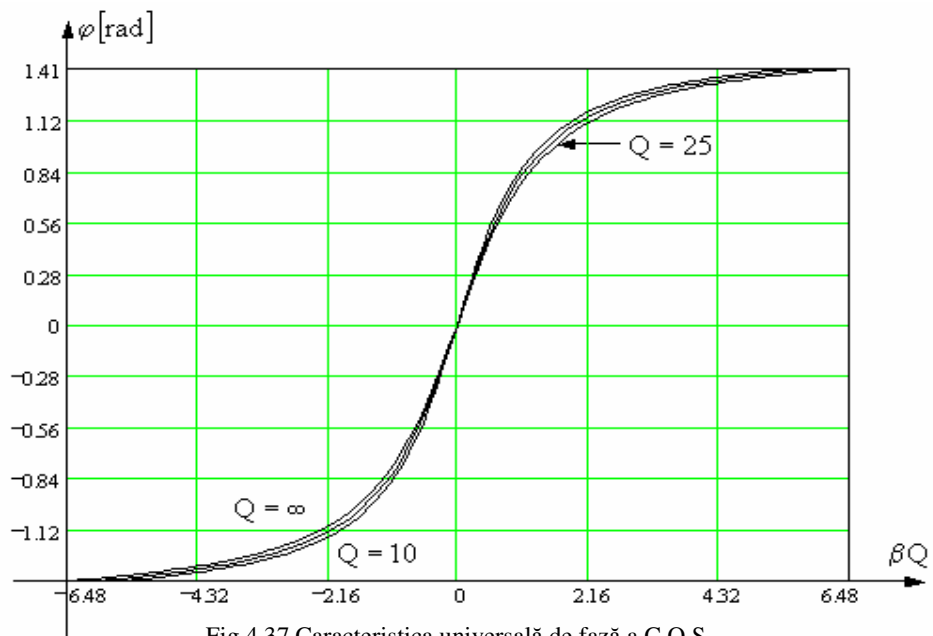


Fig.4.37 Caracteristica universală de fază a C.O.S

4.2.7. Aplicațiile C.O.S.

4.2.7.1. Influența pierderilor din bobină/condensator asupra factorului de calitate al C.O.S.

Fie un C.O.S. format dintr-o bobină și un condensator cu pierderi. Cunoscând factorul de calitate al bobinei, respectiv condensatorului, să se determine factorul de calitate al C.O.S.

Rezolvare:

Conform (4.28) și (4.33) factorul de calitate al bobinei, respectiv condensatorului are expresia:

$$\begin{cases} Q_C = \frac{1}{\omega_{s_0} r_C C} \\ Q_L = \frac{\omega_{s_0} L}{r_L} \end{cases}$$

Factorul de calitate al C.O.S. are expresia $Q = \frac{\omega_{s_0} L}{R}$.

Cum $R = r_L + r_C$, se poate scrie că:

$$Q = \frac{\omega_{s_0} L}{R} = \frac{\omega_{s_0} L}{r_L + r_C} = \frac{\omega_{s_0} L}{\frac{\omega_{s_0} L}{Q_L} + \frac{1}{\omega_{s_0} Q_C C}}$$

Deoarece $\omega_{s_0} L = \frac{1}{\omega_{s_0} C}$, rezultă că

$$Q = \frac{Q_L Q_C}{Q_L + Q_C} \quad (4.169)$$

Observație:

- Factorul de calitate al condensatorului este mult mai bun decât al bobinei $Q_C > Q_L$;

Conform cu această observație, factorul de calitate se poate aproxima:

$$Q = \frac{Q_L Q_C}{Q_C \left(\frac{Q_L}{Q_C} + 1 \right)} \approx \frac{Q_L Q_C}{Q_C} = Q_L \quad (4.170)$$

Concluzie:

- Elementul ce influențează cel mai mult calitatea circuitului oscilant este bobina.

4.2.7.2. Determinarea frecvenței de rezonanță a unui C.O.S.

Montajul utilizat la determinarea frecvenței de rezonanță a unui C.O.S. este prezentat în figura 4.38.

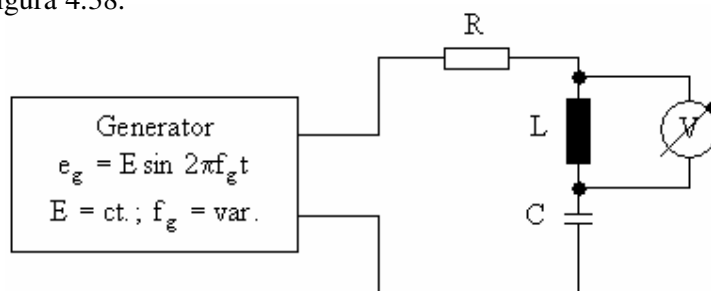


Fig.4.38 Montajul utilizat la măsurarea f_{S_0} a C.O.S.

Măsurarea frecvenței de rezonanță se realizează în următoarele condiții:

- Generatorul furnizează un semnal sinusoidal (excitație) cu amplitudine E constantă;
- Frecvența semnalului de excitație f_g este variabilă;

La determinarea f_{S_0} se utilizează fenomenul supratensiunilor. Conform (4.123) tensiunea la bornele bobinei/condensatorului este maximă la rezonanță. În consecință, metoda de determinare a f_{S_0} este următoarea:

- se modifică frecvența excitației, f_g , până când indicația de pe voltmetru este maximă. În acest moment tensiunea de pe bobină/condensator este maximă $U_L = U_{L_S}$.
- se citește valoarea frecvenței furnizate de generator. În acest caz $f_g = f_{S_0}$.

Important:

- Valoarea frecvenței de rezonanță a C.O.S. astfel determinată nu este influențată de rezistența internă a generatorului (în circuitul echivalent, r_g este plasată în serie cu bobina și condensatorul, neinfluențând partea imaginară a expresiei impedanței circuitului - vezi observația de la 4.2.4.1);

- Valoarea frecvenței de rezonanță este influențată de parametrii voltmetrului (rezistența lui internă și capacitatea de intrare).

În continuare se prezintă influența parametrilor voltmetrului asupra rezonanței C.O.S.

a) Se consideră că voltmetrul este caracterizat doar de rezistență internă R_v .

Expresia impedanței circuitului este următoarea:

$$\underline{Z}_{S,R_v} = R + \left(-j \frac{1}{\omega C} \right) + \frac{j \omega L R_v}{R_v + j \omega L} \quad (4.171)$$

Apariția unui rezistor în paralel cu bobina are ca efect faptul că noul circuit va avea o altă frecvență de rezonanță, ce se va nota $f_{0,R_v} (\omega_{0,R_v})$.

În urma prelucrării (4.171) rezultă că:

$$\underline{Z}_{S,R_v} = R + \frac{\omega^2 L^2 R_v}{R_v^2 + \omega^2 L^2} + j \left(\frac{\omega L R_v^2}{R_v^2 + \omega^2 L^2} - \frac{1}{\omega C} \right)$$

Noua frecvență de rezonanță se determină prin rezolvarea ecuației $\text{Im}\{Z_{S,R_v}\} = 0$, de unde rezultă că: $R_v^2 + \omega_{0,R_v}^2 L^2 = \omega_{0,R_v}^2 LCR_v^2$, sau

$$\omega_{0,R_v}^2 = \frac{R_v^2}{R_v^2 LC - L^2}$$

Cum frecvența de rezonanță și impedanța caracteristică a C.O.S. au expresiile, $\omega_{S_0} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, respectiv $Z_C = \sqrt{\frac{L}{C}}$ se poate scrie că:

$$\omega_{0,R_v} = \omega_{S_0} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{Z_C}{R_v}\right)^2}} \quad (4.172)$$

Observație:

➤ Deoarece voltmetrul este caracterizat de o valoare mare a rezistenței lui interne, $R_v \gg Z_C$, frecvența la care întregul circuit (C.O.S. și voltmetru) ajunge la rezonanță este foarte apropiată de frecvența de rezonanță a C.O.S. Se poate scrie că:

$$\omega_{0,R_v} \approx \omega_{S_0} \quad (4.173)$$

Pe lângă influența rezistenței interne a voltmetrului asupra frecvenței de rezonanță (influență neglijabilă), se analizează și efectul produs asupra fenomenului de supratensiune.

Conform (4.123) tensiunea la bornele bobinei/condensatorului este maximă la rezonanță. Se va calcula valoarea tensiunii de pe bobină la frecvența ω_{0,R_v} , frecvență la care voltmetrul indică un maxim al tensiunii. Această valoare maximă a tensiunii, notată U_{L,Max,R_v} se va compara cu $U_{L,S}$, valoarea maximă (teoretică) a tensiunii de pe bobină a cărei expresie este (4.112).

Tensiunea de pe bobină are expresia:

$$U_{L,R_v} = |I| \cdot |X_{L,R_v}| = \frac{E}{|Z_{S,R_v}|} |X_{L,R_v}|, \text{ unde:}$$

$$X_{L,R_v} = \frac{j\omega LR_v}{R_v + j\omega L}$$

Deoarece U_{L,R_v} se calculează la frecvența ω_{0,R_v} , rezultă că:

$$\begin{aligned} |Z_{S,R_v}|_{\omega=\omega_{0,R_v}} &= \text{Re}\{Z_{S,R_v}\} = R + \frac{\omega_{0,R_v}^2 L^2 R_v}{R_v^2 + \omega_{0,R_v}^2 L} = R + \frac{\omega_{0,R_v}^2 L^2 R_v}{\omega_{0,R_v}^2 LCR_v^2} = R + \frac{L}{C R_v} \Rightarrow \\ |Z_{S,R_v}|_{\omega=\omega_{0,R_v}} &= R + \frac{Z_C^2}{R_v} \end{aligned} \quad (4.174)$$

$$\begin{aligned} \left| \underline{X}_{L,R_v} \right|_{\omega=\omega_{0,R_v}} &= \left| \frac{j\omega_{0,R_v} LR_v}{R_v + j\omega_{0,R_v} L} \right| = \left| \frac{j\omega_{0,R_v} LR_v (R_v - j\omega_{0,R_v} L)}{R_v^2 + \omega_{0,R_v}^2 L^2} \right| = \\ &= \frac{\omega_{0,R_v} LR_v}{R_v^2 + \omega_{0,R_v}^2 L^2} |\omega_{0,R_v} L + jR_v| = \frac{\omega_{0,R_v} LR_v}{\sqrt{R_v^2 + \omega_{0,R_v}^2 L^2}} = \frac{\omega_{0,R_v} LR_v}{\omega_{0,R_v} R_v \sqrt{LC}} = \frac{L}{\sqrt{LC}} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\left| \underline{X}_{L,R_v} \right|_{\omega=\omega_{0,R_v}} = \sqrt{\frac{L}{C}} = Z_C \quad (4.175)$$

În concluzie se poate scrie că:

$$U_{L_{\text{Max}},R_v} = U_{L,R_v} \Big|_{\omega=\omega_{0,R_v}} = E \frac{\left| \underline{X}_{L,R_v} \right|_{\omega=\omega_{0,R_v}}}{\left| \underline{Z}_{S,R_v} \right|_{\omega=\omega_{0,R_v}}} = E \frac{Z_C}{R + \frac{Z_C^2}{R_v}} = \frac{E}{\frac{R}{Z_C} + \frac{Z_C}{R_v}}$$

Cum $Q = \frac{Z_C}{R}$, rezultă că:

$$U_{L_{\text{Max}},R_v} = \frac{E}{\frac{1}{Q} + \frac{Z_C}{R_v}} \quad (4.176)$$

Observație:

➤ Deoarece voltmetrul este caracterizat de o valoare mare a rezistenței lui interne, $R_v \gg Z_C$, se poate considera, cu o bună aproximație, că acesta nu influențează valoarea de maxim a tensiunii de pe bobină.

$$U_{L_{\text{Max}},R_v} \approx QE = U_{L_S} \quad (4.177)$$

b) Se consideră că voltmerul este caracterizat doar de capacitatea de intrare C_v .

Expresia impedanței circuitului este următoarea:

$$\underline{Z}_{S,C_v} = R + \left(-j\frac{1}{\omega C} \right) + \frac{j\omega L}{1 - \omega^2 LC_v} \quad (4.178)$$

Apariția unui condensator în paralel cu bobina are ca efect faptul că noul circuit va avea o altă frecvență de rezonanță, ce se va nota f_{0,C_v} (ω_{0,C_v}).

În urma prelucrării (4.178) rezultă că:

$$\underline{Z}_{S,C_v} = R + j \left(\frac{\omega L}{1 - \omega^2 LC_v} - \frac{1}{\omega C} \right)$$

Noua frecvență de rezonanță se determină prin rezolvarea ecuației $\text{Im}\{Z_{S,C_v}\} = 0$, de unde rezultă că: $\omega_{0,C_v}^2 LC = 1 - \omega_{0,C_v}^2 LC_v$, sau

$$\omega_{0,C_v}^2 = \frac{1}{L(C + C_v)}$$

Cum frecvența de rezonanță a C.O.S. are expresia $\omega_{S_0} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ se poate scrie că:

$$\omega_{0,C_v} = \omega_{S_0} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{C_v}{C}}} \quad (4.179)$$

Observație:

➤ Pentru ca voltmetrul să influențeze cât mai puțin frecvența de rezonanță a C.O.S. trebuie ca valoarea capacității de intrare, C_v să aibă o valoare mică (pF). În acest caz, datorită faptului că $C_v \ll C$, se poate scrie că:

$$\omega_{0,C_v} \approx \omega_{S_0} \quad (4.180)$$

În continuare se analizează și efectul produs de capacitatea de intrare C_v a voltmerului asupra supratensiunii. Se va calcula valoarea tensiunii de pe bobină la frecvența ω_{0,C_v} , frecvență la care voltmetrul indică un maxim al tensiunii. Această valoare maximă a tensiunii, notată $U_{L_{\text{Max},C_v}}$ se va compara cu U_{L_S} , valoarea maximă (teoretică) a tensiunii de pe bobină a cărei expresie este oferită de (4.112).

Tensiunea de pe bobină are expresia $U_{L,C_v} = |I| \cdot |X_{L,C_v}| = \frac{E}{|Z_{S,C_v}|} |X_{L,C_v}|$, unde:

$$X_{L,C_v} = \frac{j\omega L}{1 - \omega^2 LC_v}$$

Deoarece U_{L,C_v} se calculează la frecvența ω_{0,C_v} , rezultă că:

$$|Z_{S,C_v}|_{\omega=\omega_{0,C_v}} = \text{Re}\{Z_{S,C_v}\} = R \quad (4.181)$$

$$\begin{aligned} |X_{L,C_v}|_{\omega=\omega_{0,C_v}} &= \frac{\omega_{0,C_v} L}{1 - \omega_{0,C_v}^2 LC_v} = \frac{\omega_{0,C_v} L}{\omega_{0,C_v}^2 LC} = \frac{1}{\omega_{0,C_v} C} = \\ &= \frac{\sqrt{L(C + C_v)}}{C} = \frac{\sqrt{LC \left(1 + \frac{C_v}{C}\right)}}{C} = \sqrt{\frac{L}{C}} \sqrt{1 + \frac{C_v}{C}} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$|X_{L,C_v}|_{\omega=\omega_{0,C_v}} = Z_C \sqrt{1 + \frac{C_v}{C}} \quad (4.182)$$

În concluzie se poate scrie că:

$$U_{L_{\text{Max}}, C_v} = U_{L, C_v} \Big|_{\omega=\omega_0, C_v} = E \frac{\left| \frac{X_{L, C_v} }{Z_{S, C_v}} \right|_{\omega=\omega_0, C_v}}{\left| Z_{S, C_v} \right|_{\omega=\omega_0, C_v}} = E \frac{Z_C}{R} \sqrt{1 + \frac{C_v}{C}}$$

Cum $Q = \frac{Z_C}{R}$, rezultă că:

$$U_{L_{\text{Max}}, C_v} = QE \sqrt{1 + \frac{C_v}{C}} \quad (4.183)$$

Observație:

➤ Deoarece voltmetrul este caracterizat de o valoare mică a capacității de intrare, $C_v \ll C$, se poate considera, cu o bună aproximație, că acesta nu influențează valoarea de maxim a tensiunii de pe bobină.

$$U_{L_{\text{Max}}, C_v} \approx QE = U_{L_S} \quad (4.184)$$

4.2.7.3. Determinarea rezistenței de pierderi a unui C.O.S.

Montajul utilizat la determinarea rezistenței de pierderi a unui C.O.S. este prezentat în figura 4.39.

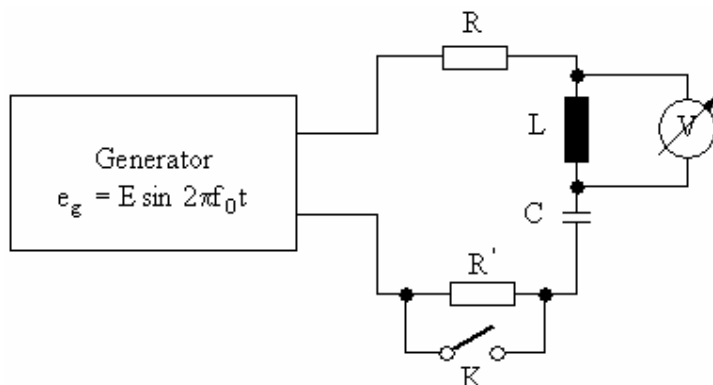


Fig.4.39 Montajul utilizat la determinarea rezistenței de pierderi a C.O.S.

La determinarea valorii rezistenței de pierderi, R , a C.O.S. se utilizează următorul algoritm:

➤ Comutatorul K este închis. Se aduce C.O.S. la rezonanță prin modificarea frecvenței semnalului de la generator. C.O.S. este la rezonanță, $f_g = f_{S_0}$, când tensiunea de pe bobină/condensator este maximă. Se notează această valoare U_{L_S} .

➤ Menținând nemodificate valorile amplitudinii (E), respectiv frecvenței generatorului ($f_g = f_{s_0}$), se deschide comutatorul K . În acesta caz rezistorul R' (de valoare cunoscută) apare în serie cu C.O.S. Noul circuit se află tot la rezonanță. Se modifică doar valoarea factorului de calitate al C.O.S., vezi (4.166), ceea ce înseamnă că valoarea tensiunii de pe bobină/condensator are o altă valoare, U'_{L_S} .

➤ Prin raportul celor două valori ale tensiunii de pe bobină/condensator, cu și fără rezistorul R' în circuit, se determină valoarea rezistenței de pierderi a C.O.S.

Cantitativ, această metodă va fi prezentată în continuare.

➤ Comutatorul K este închis.

Din (4.114) și (4.115) rezultă că:

$$U_{C_S} = QE = \frac{E}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (4.185)$$

➤ Comutatorul K este deschis.

Noua impedanță a circuitului este:

$$\underline{Z}'_S = R + R' + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

de unde rezultă că frecvența de rezonanță a C.O.S. nu se modifică, $f_{s_0} = \frac{2\pi}{\sqrt{LC}}$.

Conform (4.166) noul factor de calitate al circuitului are expresia: $Q' = \frac{1}{R + R'} \sqrt{\frac{L}{C}}$

Se poate scrie expresia tensiunii de bobină/condensator:

$$U'_{C_S} = Q'E = \frac{E}{R + R'} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (4.186)$$

➤ Fie $n = \frac{U_{C_S}}{U'_{C_S}} > 1$

Din (4.185) și (4.186) rezultă că:

$$n = \frac{U_{C_S}}{U'_{C_S}} = \frac{R + R'}{R} \Rightarrow$$

$$R = \frac{R'}{n - 1} \quad (4.187)$$

Important:

➤ După cum s-a prezentat anterior, pentru a modifica banda de frecvență a circuitului, fără a-i modifica frecvența de rezonanță trebuie să se intervină asupra factorului de calitate Q al circuitului. Acest lucru (fără a modifica valoarea bobinei sau a condensatorului) se realizează prin introducerea în serie cu bobina și condensatorul a unui rezistor. Pe baza (4.187) se poate calcula valoarea rezistorului ce trebuie înseriat cu C.O.S. astfel încât banda circuitului (B_{3dB}) să crească de m ori ($B'_{3dB} = m \cdot B_{3dB}$).

Conform (4.160), $B_{3dB} = \frac{f_{S_0}}{Q}$ și (4.166) se poate scrie că:

$$m = \frac{B'_{3dB}}{B_{3dB}} = \frac{\frac{f_{S_0}}{Q}}{\frac{f_{S_0}}{Q'}} = \frac{Q'}{Q} = \frac{R + R'}{R} \Rightarrow$$

$$R' = (m-1)R \quad (4.188)$$

4.3. Oscilații forțate în circuitul derivație (C.O.D.)

În afară de circuite care să prezinte, într-o bandă îngustă de frecvențe, o impedanță mică, sunt necesare și circuite care, tot într-o bandă îngustă de frecvențe, să prezinte o impedanță de valoare mare. De această proprietate se bucură circuitele oscilante derivație-C.O.D.

La fel ca și în cazul circuitului serie și în acest caz o excitație sinusoidală duce la apariția prin circuit a unui răspuns caracter sinusoidal de aceeași frecvență cu a sursei.

4.3.1. Analiza în timp a circuitului

În cadrul acestui capitol se va realiza un studiu în detaliu asupra răspunsului dat de C.O.D la o semnal de intrare de tip sinusoidal.

Studiul se realizează în următoarele condiții

- se analizează doar regimul permanent de funcționare al circuitului (se utilizează doar soluțiile de regim forțat rezultate din rezolvarea ecuațiilor diferențiale);
- analiza se va efectua pe mai multe modele de echivalare a pierderilor din circuit;
- se vor prezenta diagrame fazoriale aferente mărimilor studiate.

4.3.1.1. Analiza circuitului derivație cu luarea în calcul a tuturor pierderilor

Schema circuitului oscilant derivație este prezentată în figura 4.40.

Observații:

- Bobina și condensatorul sunt conectate în paralel;
- Rezistențele de pierderi ale bobinei r_L , respectiv condensatorului r_C sunt plasate în serie cu elementele respective;
- În paralel cu elementele circuitului acționează o sursă de tensiune sinusoidală de tipul $e(t) = E \cos \omega t$ caracterizată de o rezistență internă r_g , care excită circuitul, ducând la apariția unui curent prin bobină și condensator.

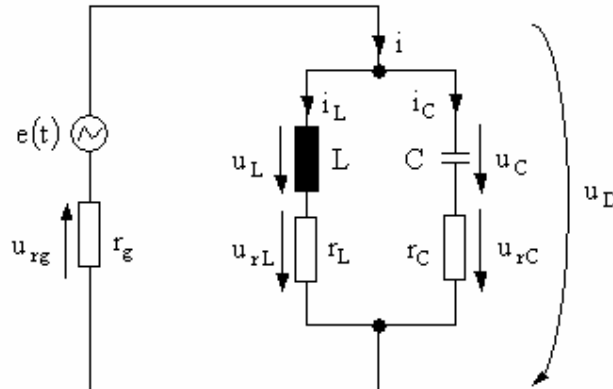


Fig.4.40 Schema unui circuit oscilant derivație cu luarea în calcul a tuturor pierderilor

Ecuțiile ce descriu circuitul sunt:

$$\begin{cases} u_L = L \frac{di_L}{dt} \\ e = E \cos \omega t = u_L + u_{rL} + u_{r_g} = u_C + u_{rC} + u_{r_g} \\ u_{r_g} = i r_g ; u_{rL} = r_L i_L ; u_{rC} = r_C i_C ; i = i_L + i_C \\ i_C = C \frac{du_C}{dt} ; u_C = \frac{1}{C} \int i_C dt \end{cases} \quad (4.189)$$

1. Expresia tensiunii de pe condensator u_C

Din (4.189) se poate scrie că:

$$\begin{cases} L \frac{di_L}{dt} + r_L i_L = u_C + r_C C \frac{du_C}{dt} \\ i_L = \frac{e}{r_g} - \frac{u_C}{r_g} - C \frac{r_C + r_g}{r_g} \frac{du_C}{dt} \\ \frac{di_L}{dt} = \frac{1}{r_g} \frac{de}{dt} - \frac{1}{r_g} \frac{du_C}{dt} - C \frac{r_C + r_g}{r_g} \frac{d^2 u_C}{dt^2} \end{cases} \quad (4.190)$$

Ecuția diferențială neomogenă echivalentă cu (4.189) în care necunoscuta este u_C are forma:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{1}{LC} \frac{L + C[r_C r_g + r_L (r_C + r_g)]}{r_C + r_g} \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC} \frac{r_L + r_g}{r_C + r_g} u_C = \\ = \frac{1}{LC} \frac{1}{r_C + r_g} \left[r_L e + L \frac{de}{dt} \right] = \frac{1}{LC} \frac{1}{r_C + r_g} [r_L E \cos \omega t - \omega L E \sin \omega t] \end{aligned} \quad (4.191)$$

Se introduc următoarele notații:

$$\begin{cases} \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \\ A = \omega_0^2 \frac{L + C[r_C r_g + r_L (r_C + r_g)]}{r_C + r_g} = \omega_0^2 \left[\frac{L}{r_C + r_g} + C \left(r_L + \frac{r_C r_g}{r_C + r_g} \right) \right] \\ B = \omega_0^2 \frac{r_L + r_g}{r_C + r_g} \\ D = \omega_0^2 \frac{r_L}{r_C + r_g} E \\ F = \omega_0^2 \frac{\omega L}{r_C + r_g} E \end{cases} \quad (4.192)$$

Cu aceste notații, ecuația (4.191) devine:

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + A \frac{du_C}{dt} + B u_C = D \cos \omega t - F \sin \omega t \quad (4.193)$$

Soluția de regim forțat a acestei ecuații (singura care interesează, deoarece se dorește analiza regimului permanent al variației tensiunii u_C) este o soluție particulară de forma:

$$u_C(t) = X \sin \omega t + Y \cos \omega t$$

Se poate scrie că:

$$\begin{cases} \frac{du_C(t)}{dt} = \omega X \cos \omega t - \omega Y \sin \omega t \\ \frac{d^2 u_C(t)}{dt^2} = -\omega^2 X \sin \omega t - \omega^2 Y \cos \omega t \end{cases}$$

Înlocuind în (4.193) rezultă că:

$$-\omega^2 (X \sin \omega t + Y \cos \omega t) + \omega A (X \cos \omega t - Y \sin \omega t) + B (X \sin \omega t + Y \cos \omega t) = \\ = D \cos \omega t - F \sin \omega t$$

Prin identificare se obține:

$$\begin{cases} X = \frac{\omega A D - (B - \omega^2) F}{(B - \omega^2)^2 + \omega^2 A^2} \\ Y = \frac{D(B - \omega^2) + \omega A F}{(B - \omega^2)^2 + \omega^2 A^2} \end{cases}$$

Se notează $\operatorname{tg} \varphi_E = \frac{Y}{X}$

În concluzie:

$$u_C(t) = X \sin \omega t + Y \cos \omega t = X \left[\sin \omega t + \frac{Y}{X} \cos \omega t \right] = \frac{X}{\cos \varphi_E} \sin(\omega t + \varphi_E) = \\ = X \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_E} \sin(\omega t + \varphi_E) = \sqrt{X^2 + Y^2} \sin(\omega t + \varphi_E)$$

sau

$$u_C(t) = U_C \sin(\omega t + \varphi_E) = U_C \cos\left(\omega t + \varphi_E - \frac{\pi}{2}\right) \quad (4.194)$$

unde

$$U_C = \sqrt{X^2 + Y^2} \quad (4.195)$$

2. Expresia curentului prin ramura cu condensator i_C

Din (4.189) și (4.194) se obține:

$$i_C = C \frac{du_C}{dt} = \omega C U_C \cos(\omega t + \varphi_E) = I_C \cos(\omega t + \varphi_E) \quad (4.196)$$

unde

$$I_C = \omega C U_C \quad (4.197)$$

$$\varphi_E = \operatorname{arctg}\left(\frac{Y}{X}\right) \quad (4.198)$$

este defazajul dintre i_C și semnalul de intrare e .

3. Expresia tensiunii de pe circuitul derivație u_D

Din (4.189) și (3.195) se obține:

$$u_D = u_C + r_C i_C = u_C + r_C C \frac{du_C}{dt} = U_C [\sin(\omega t + \varphi_E) + \omega C r_C \cos(\omega t + \varphi_E)]$$

Se notează $\operatorname{tg} \varphi_C = \frac{1}{\omega r_C C}$

rezultând că:

$$u_D = U_C \left[\sin(\omega t + \varphi_E) + \frac{\cos \varphi_C}{\sin \varphi_C} \cos(\omega t + \varphi_E) \right] = \frac{U_C}{\sin \varphi_C} \cos(\omega t + \varphi_E - \varphi_C)$$

sau

$$u_D = U_D \cos(\omega t + \varphi_E - \varphi_C) \quad (4.199)$$

unde:

$$U_D = \frac{U_C}{\sin \varphi_C} = U_C \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_C}}{\operatorname{tg} \varphi_C} = U_C \sqrt{1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \varphi_C}} = U_C \sqrt{1 + (\omega r_C C)^2} \quad (4.200)$$

$$\varphi_C = \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{\omega r_C C} \right) \quad (4.201)$$

este defazajul dintre defazajul dintre i_C și u_D

4. Expresia curentului prin ramura cu bobină i_L .

Din (4.189) și (4.199) se obține următoarea ecuație diferențială neomogenă de ordinul I:

$$L \frac{di}{dt} + r_L i_L = U_D \cos(\omega t + \varphi_E - \varphi_C) \quad (4.202)$$

Se rezolvă ecuația diferențială omogenă $L \frac{di}{dt} + r_L i_L = 0$

a cărei soluție este:

$$i_L = K e^{-\frac{r_L}{L} t} \quad (4.203)$$

Pentru a rezolva ecuația neomogenă se aplică metoda variației constantelor:

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{dK}{dt} e^{-\frac{r_L}{L} t} - K \frac{r_L}{L} e^{-\frac{r_L}{L} t} \quad (4.204)$$

Din (4.202), (4.203) și (4.204) se obține:

$$\frac{dK}{dt} e^{-\frac{r_L}{L} t} - K \frac{r_L}{L} e^{-\frac{r_L}{L} t} + K e^{-\frac{r_L}{L} t} = U_D \cos(\omega t + \varphi_E - \varphi_C) \Rightarrow$$

$$K = \frac{U_D}{r_L} \frac{1}{1 + \frac{(\omega L)^2}{r_L^2}} e^{\frac{r_L}{L} t} \left[\cos(\omega t + a - \varphi_C) + \frac{\omega L}{r_L} \sin(\omega t + \varphi_E - \varphi_C) \right] \quad (4.205)$$

Din (4.203) și (4.205) rezultă că:

$$i_L = \frac{U_D}{r_L} \frac{1}{1 + \frac{(\omega L)^2}{r_L^2}} \left[\cos(\omega t + \varphi_E - \varphi_C) + \frac{\omega L}{r_L} \sin(\omega t + \varphi_E - \varphi_C) \right] \quad (4.206)$$

Se notează $\operatorname{tg} \varphi_L = \frac{\omega L}{r_L}$,

rezultând că:

$$\begin{aligned} i_L &= \frac{U_D}{r_L} \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_L} \left[\cos(\omega t + \varphi_E - \varphi_C) + \frac{\sin \varphi_L}{\cos \varphi_L} \sin(\omega t + \varphi_E - \varphi_C) \right] = \\ &= \frac{U_D}{r_L} \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_L} \frac{1}{\cos \varphi_L} \cos(\omega t + \varphi_E - \varphi_C - \varphi_L) = \\ &= \frac{U_D}{r_L} \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_L}} \cos(\omega t + \varphi_E - \varphi_C - \varphi_L) \end{aligned}$$

sau

$$i_L = I_L \cos(\omega t + \varphi_E - \varphi_C - \varphi_L) \tag{4.207}$$

unde

$$I_L = \frac{U_D}{r_L} \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_L}} = \frac{U_D}{r_L} \cos \varphi_L \tag{4.208}$$

$$\varphi_L = \operatorname{arctg} \left(\frac{\omega L}{r_L} \right) \tag{4.209}$$

este defazajul dintre defazajul dintre i_L și u_D

5. Expresia curentului total din circuit

Din (4.189), (4.196) și (4.207) rezultă că:

$$i = i_L + i_C = I_L \cos(\omega t + \varphi_E - \varphi_C - \varphi_L) + I_C \cos(\omega t + \varphi_E) \tag{4.210}$$

Pentru a reprezenta diagrama fazorială a curenților din circuit se alege ca origine de fază tensiunea de excitație \underline{E} . Diagramele fazoriale atât pentru caracterul inductiv, cât și capacitiv al circuitului sunt prezentate în figura 4.41.

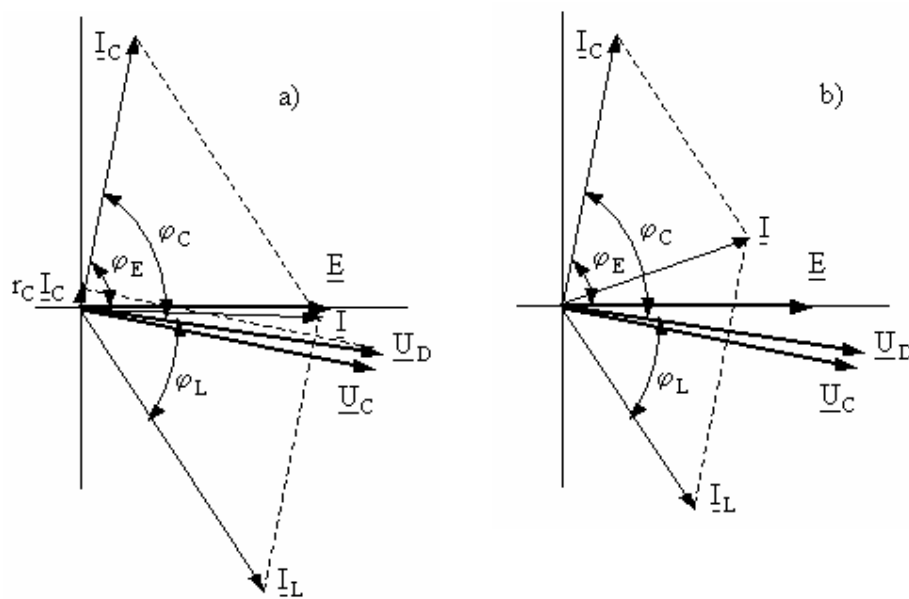


Fig.4.41 Diagramele fazoriale asociate curenților în cazul unui C.O.D. (luarea în calcul a tuturor pierderilor)
 a) circuitul are un caracter inductiv; b) circuitul are un caracter capacitiv

Realizarea diagramei fazoriale implică următorii pași:

- Alegerea tensiunii de excitație \underline{E} , ca origine de fază;
- Construirea fazorului \underline{I}_C , atașat curentului din ramura cu condensatorul. Curentul \underline{I}_C este defazat **înaintea** tensiunii de excitație \underline{E} , cu unghiul φ_E , a cărui valoare respectă

condiția: $0 < \varphi_E < \frac{\pi}{2}$;

➤ Construirea fazorului \underline{U}_C , atașat tensiunii de pe condensator. Tensiunea \underline{U}_C este defazată **în urma** curentului \underline{I}_C cu $\frac{\pi}{2}$. În consecință fazorul \underline{U}_C , este defazat **în urma** lui \underline{E} cu unghiul $\frac{\pi}{2} - \varphi_E > 0$;

➤ Construirea fazorului \underline{U}_D , atașat tensiunii de pe gruparea paralel, se poate realiza prin două metode:

- Cum $u_D = u_C + i_C r_C$, rezultă că $\underline{U}_D = \underline{U}_C + r_C \underline{I}_C$. În consecință fazorul \underline{U}_D se construiește conform regulii paralelogramului, ce are ca laturi pe \underline{U}_C , respectiv $r_C \underline{I}_C$.

- Se construiește direct fazorul \underline{U}_D , ținând cont că tensiunea \underline{U}_D este defazată **în urma** curentului \underline{I}_C cu unghiul φ_C .

- Cum $\varphi_E < \varphi_C < \frac{\pi}{2}$, tensiunea \underline{U}_D este defazată **în urma** tensiunii de excitație \underline{E} , cu unghiul $\varphi_C - \frac{\pi}{2}$.

➤ Construirea fazorului \underline{I}_L , atașat curentului din ramura cu bobina. Curentul \underline{I}_L este defazat **în urma** tensiunii \underline{U}_D cu unghiul φ_L , a cărui valoare respectă condiția:

$$0 < \varphi_L < \varphi_C < \frac{\pi}{2};$$

➤ Construirea fazorului \underline{I} , atașat curentului total din circuit. Fazorul \underline{I} se construiește conform regulii paralelogramului, ce are ca laturi pe \underline{I}_C , respectiv \underline{I}_L .

Observație:

➤ În cazul în care \underline{I} este defazat **în urma** tensiunii de excitație \underline{E} , C.O.D. are un caracter inductiv;

➤ În cazul în care \underline{I} este defazat **înaintea** tensiunii de excitație \underline{E} , C.O.D. are un caracter capacitiv;

În figura 4.42 sunt reprezentate formele de undă ale tensiunii de excitație și a curentului total prin C.O.D. în cazul regimului inductiv, respectiv capacitiv.

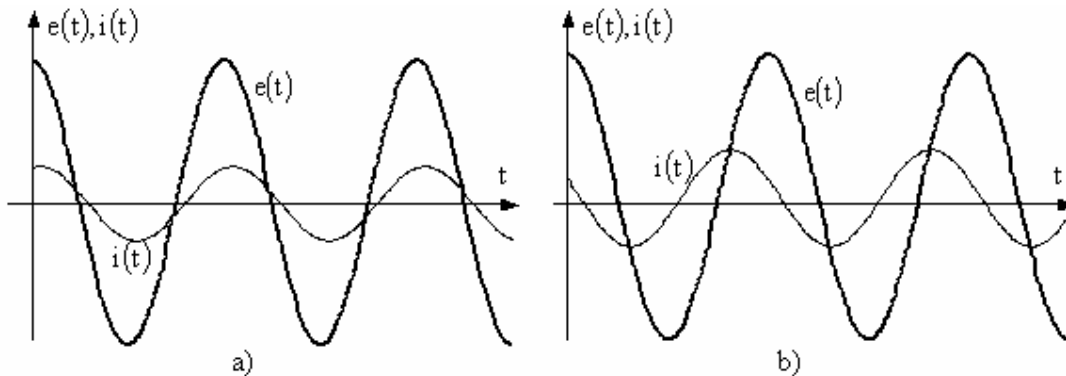


Fig.4.42 Formele de undă ale tensiunii de excitație și a curentului total, în cazul unui C.O.D. (luarea în calcul a tuturor pierderilor) a) circuitul are un caracter inductiv; b) circuitul are un caracter capacitiv

În figura 4.43 sunt reprezentate formele de undă ale tensiunii de excitație și ale curenților ce caracterizează funcționarea unui C.O.D., în regim inductiv, respectiv capacitiv.

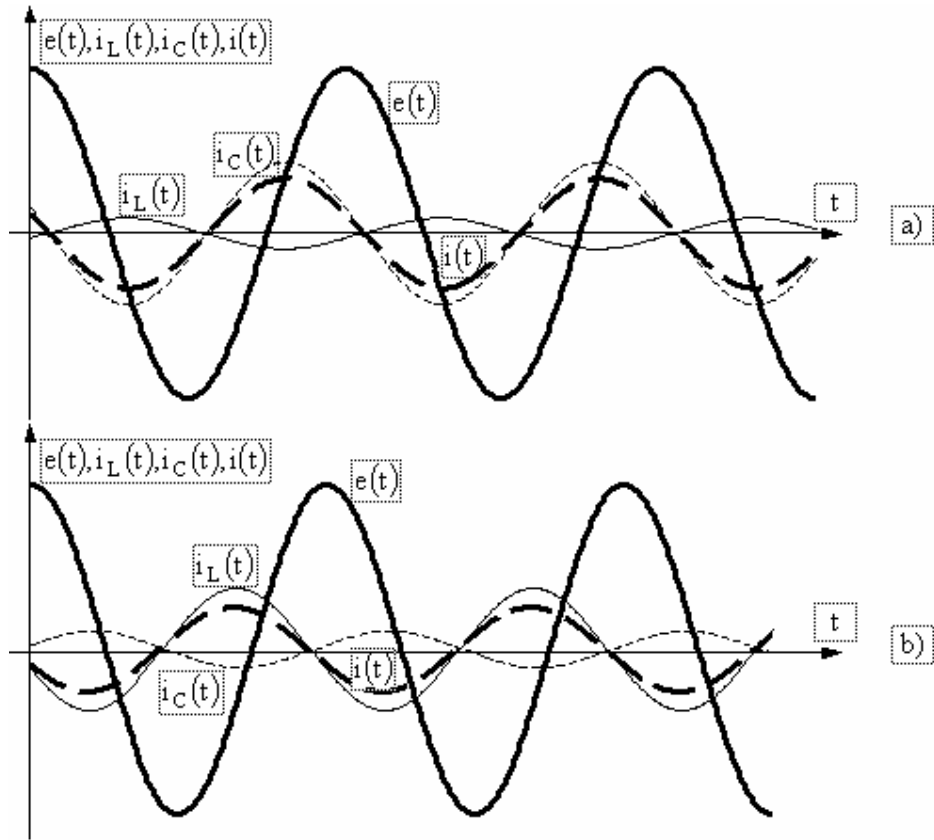


Fig.4.43. Variația tensiunii de excitație și a curenților ce caracterizează funcționarea unui C.O.D. (luarea în calcul a tuturor pierderilor) a) circuitul are un caracter capacitiv; b) circuitul are un caracter inductiv

4.3.1.2. Analiza circuitului derivație cu neglijarea rezistenței interne a generatorului

Schema circuitului oscilant derivație este prezentată în figura 4.44.

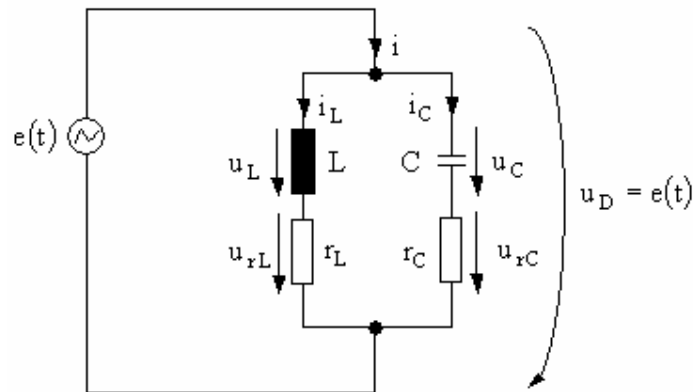


Fig.4.44 Schema unui circuit oscilant derivație în care $r_g = 0$

Ecuțiile ce descriu circuitul în cazul în care $r_g = 0$ sunt:

$$\begin{cases} e = E \cos \omega t = u_L + u_{rL} = u_C + u_{rC} = u_D \\ u_L = L \frac{di_L}{dt} ; u_{rL} = r_L i_L ; u_{rC} = r_C i_C \\ i_C = C \frac{du_C}{dt} ; u_C = \frac{1}{C} \int i_C dt \\ i = i_L + i_C \end{cases} \quad (4.211)$$

Expresiile acestor semnale se vor deduce prin particularizarea celor obținute în paragraful precedent.

1. Expresia tensiunii de pe circuitul derivație u_D .

Conform schemei din figura 4.44, rezultă că:

$$u_D = e(t) = E \cos \omega t \quad (4.212)$$

Din (4.212) și (4.199) se obține că:

$$U_D = E \quad (4.213)$$

$$\varphi_E = \varphi_C \quad (4.214)$$

2. Expresia tensiunii de pe condensator u_C .

Din (4.200) și (4.213) rezultă că:

$$u_C(t) = E \sin \varphi_C \cos \left(\omega t + \varphi_C - \frac{\pi}{2} \right)$$

Cum $\varphi_C = \arctg \left(\frac{1}{\omega r_C C} \right)$, se obține că:

$$u_C(t) = \frac{E}{\sqrt{1 + (\omega r_C C)^2}} \cos \left(\omega t + \varphi_C - \frac{\pi}{2} \right) \quad (4.215)$$

3. Expresia curentului prin ramura cu condensator i_C

Din (4.196), (4.197), (4.213) și (4.215) se obține:

$$i_C = \frac{\omega C}{\sqrt{1 + (\omega r_C C)^2}} E \cos(\omega t + \varphi_C) \quad (4.216)$$

4. Expresia curentului prin ramura cu bobină i_L .

Din (4.207), (4.208), (4.213) și (4.214) se obține:

$$i_L = \frac{E}{r_L} \cos \varphi_L \cos(\omega t - \varphi_L) \quad (4.217)$$

Cum $\operatorname{tg} \varphi_L = \frac{\omega L}{r_L}$, rezultă că:

$$i_L = \frac{E}{\sqrt{r_L^2 + (\omega L)^2}} \cos(\omega t - \varphi_L) \quad (4.218)$$

5. Expresia curentului total din circuit

Din (4.211), (4.216) și (4.218) rezultă că:

$$i = i_L + i_C = \frac{E}{\sqrt{r_L^2 + (\omega L)^2}} \cos(\omega t - \varphi_L) + \frac{\omega C}{\sqrt{1 + (\omega r_C C)^2}} E \cos(\omega t + \varphi_C) \quad (4.219)$$

Diagramele fazoriale atât pentru caracterul inductiv, cât și capacitiv al circuitului sunt prezentate în figura 4.45.

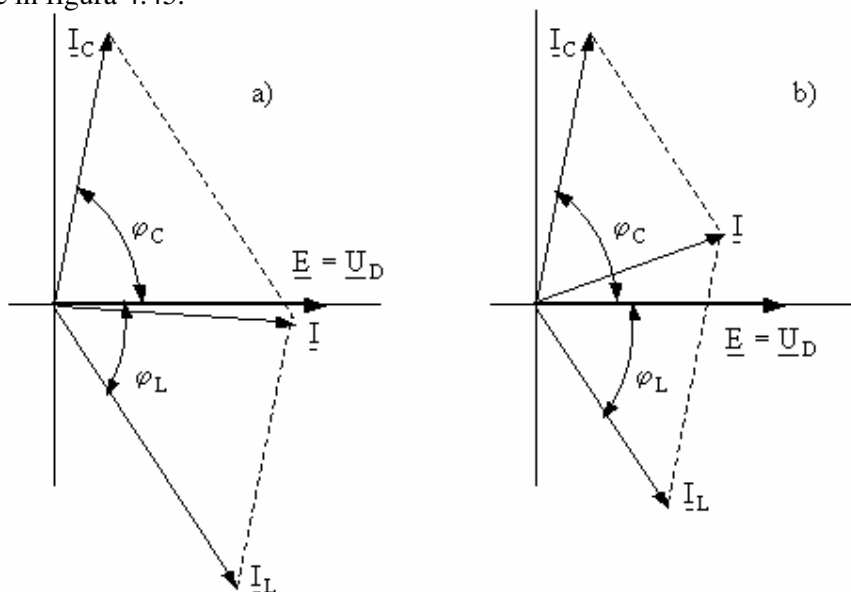


Fig.4.45 Diagramele fazoriale asociate curenților în cazul unui C.O.D. ($r_g = 0$)
 a) circuitul are un caracter inductiv; b) circuitul are un caracter capacitiv

Observație:

➤ Formele de undă ale tensiunii de excitație și ale curenților ce caracterizează funcționarea unui C.O.D. în cazul în care $r_g = 0$, sunt asemănătoare cu cele reprezentate în figura 4.43. Deoarece aceste reprezentări nu aduc nimic relevant nu au mai fost prezentate.

4.3.1.3. Analiza circuitului derivație cu neglijarea rezistenței interne a generatorului și a pierderilor din condensator

Pentru simplificarea calculelor și a reprezentărilor grafice se neglijează rezistența de pierderi a condensatorului $r_C = 0$. În schimb se majorează corespunzător rezistența de pierderi a bobinei, astfel încât pierderile de energie din circuit vor rămâne aceleași. Schema circuitului oscilant derivație este prezentată în figura 4.46.

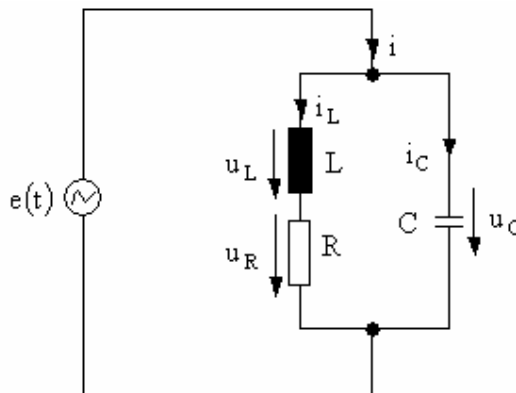


Fig.4.46 Schema unui circuit oscilant derivație în care pierderile sunt concentrate în serie cu bobina

Conform schemei din figura 4.46 se va utiliza notația:

$$R = r_g + r_L + r_C \quad (4.220)$$

unde R însumează pierderile din întreg circuitul.

1. Expresia tensiunii de pe condensator u_C .

În acest caz tensiunea de pe condensator este egală cu tensiunea de excitație:

Din (4.200) și (4.213) rezultă că:

$$u_C(t) = E \cos \omega t \quad (4.221)$$

2. Expresia curentului prin ramura cu condensator i_C

Deoarece defazaul dintre tensiunea de pe condensator și curentul i_C este de $\frac{\pi}{2}$, (curentul este defazat **înaintea** tensiunii) se poate scrie că:

$$\varphi_C = \frac{\pi}{2} \quad (4.222)$$

adică i_C este defazat **înaintea** tensiunii de excitație cu $\frac{\pi}{2}$.

Din (4.216) rezultă că:

$$i_C = \omega C E \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{E}{\frac{1}{\omega C}} \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (4.223)$$

3. Expresia curentului prin ramura cu bobină i_L .

Din (4.218) și (4.220) se obține:

$$i_L = \frac{E}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \cos(\omega t - \varphi_L) \quad (4.224)$$

Conform (4.224) curentul prin bobină este defazat în urma tensiunii de excitație cu:

$$\varphi_L = \arctg\left(\frac{\omega L}{R}\right) \quad (4.225)$$

4. Expresia curentului total din circuit

Din (4.219), (4.223) și (4.224) rezultă că:

$$i = i_L + i_C = \frac{E}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \cos(\omega t - \varphi_L) + \frac{E}{\frac{1}{\omega C}} \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (4.226)$$

Diagramele fazoriale atât pentru caracterul inductiv, cât și capacitiv al circuitului sunt prezentate în figura 4.47.

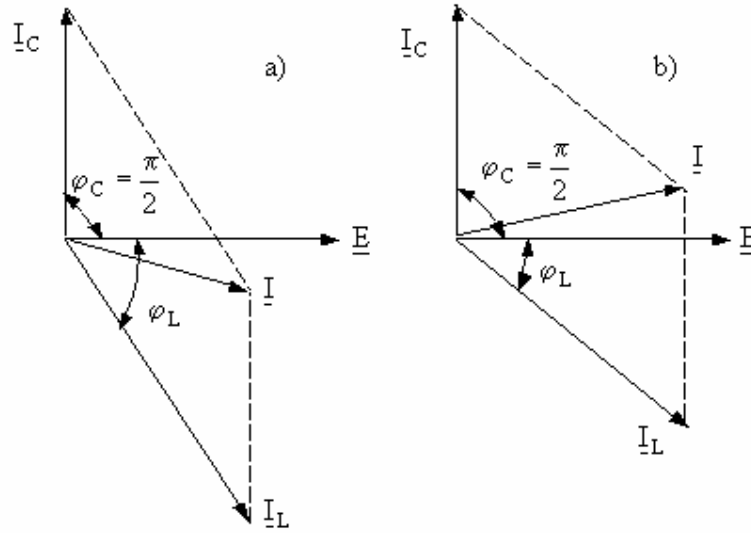


Fig.4.47 Diagramele fazoriale asociate curenților pentru un C.O.D. în care pierderile sunt concentrate în serie cu bobina a) circuitul are un caracter inductiv; b) circuitul are un caracter capacitiv

În figura 4.48 sunt reprezentate formele de undă ale tensiunii de excitație și ale curenților ce caracterizează funcționarea unui C.O.D. (în care pierderile sunt concentrate în serie cu bobina), în regim inductiv, respectiv capacitiv.

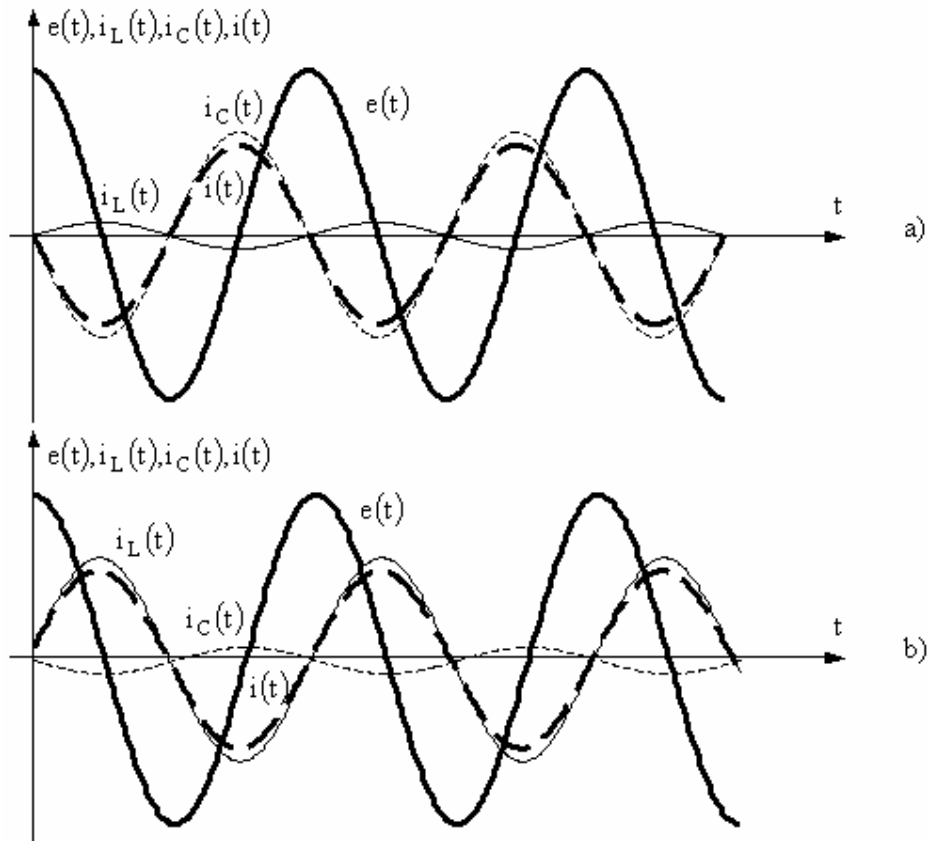


Fig.4.48. Variația tensiunii de excitație și a curenților ce caracterizează funcționarea unui C.O.D. (pierderile sunt concentrate în serie cu bobina) a) circuitul are un caracter capacitiv; b) circuitul are un caracter inductiv

4.3.2. Fenomenul de rezonanță

4.3.2.1. Determinarea frecvenței de rezonanță

După cum s-a precizat în cadrul paragrafului 4.2.4.1, cazul particular în care reactanța circuitului este nulă se numește rezonanță. În consecință trebuie determinată impedanța circuitului derivație. Conform circuitului din figura 4.46, rezultă că:

$$\underline{Z}_D = \frac{\frac{1}{j\omega C}(R + j\omega L)}{\frac{1}{j\omega C} + R + j\omega L} \quad (4.227)$$

Prin prelucrarea expresiei (4.227) pentru aducerea ei la forma de tipul $\underline{Z}_D = R_D + jX_D$, se obține:

$$\underline{Z}_D = \frac{R}{(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega RC)^2} + j \frac{\omega L(1 - \omega^2 LC) - \omega R^2 C}{(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega RC)^2} = R_D + jX_D \quad (4.228)$$

Aplicând relației (4.228) definiția rezonanței rezultă că:

$$\begin{aligned} X_D = 0 &\Rightarrow \omega L(1 - \omega^2 LC) - \omega R^2 C = 0 \Rightarrow \\ \omega_D &= \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - R^2 \frac{C}{L}} \end{aligned} \quad (4.229)$$

unde cu ω_D s-a notat frecvența de rezonanță a C.O.D.

Utilizând expresiile obținute la studiul C.O.S., adică, frecvența de rezonanță, $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ și factorul de calitate al unui circuit compus dintr-o bobină și un condensator

$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$, expresia frecvenței de rezonanță caracteristică C.O.D. devine:

$$\omega_D = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{Q^2}} \quad (4.230)$$

Eroarea relativă dintre frecvența de rezonanță unui C.O.D și C.O.S. construite cu ajutorul acelorași piese se definește astfel:

$$\varepsilon_{r\omega_D} = \frac{|\omega_D - \omega_0|}{\omega_0} \cdot 100 = \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{Q^2}}\right) \cdot 100[\%] \quad (4.231)$$

Dacă se dezvoltă radicalul în serii de puteri, după formula:

$$\sqrt{1 - x^2} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^2}{3} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{x^2}{5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \frac{x^2}{7} - \dots$$

și având în vedere ordinul de mărime al termenilor $x^2(1/Q^2)$, $x^3(1/Q^3)$, $x^4(1/Q^4)$... se poate limita dezvoltarea în serie doar la primii doi termeni, obținându-se:

$$\omega_D \approx \omega_0 \left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right) \quad (4.232)$$

$$\varepsilon_{r\omega_D} \approx \frac{1}{2Q^2} \cdot 100[\%] \quad (4.233)$$

Exemplu:

pentru $Q = 10$ rezultă că: $\varepsilon_{r\omega_D} \approx 0.2 [\%]$;

pentru $Q = 100$ rezultă că: $\varepsilon_{r\omega_C} = 5 \cdot 10^{-3} [\%]$;

Concluzie:

➤ Circuitul oscilant derivație este la rezonanță (la fel ca și circuitul oscilant serie) atunci când frecvența sursei de excitație coincide cu frecvența oscilațiilor libere ale circuitului R.L.C.;

Matematic se poate scrie că:

$$\omega_D \approx \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (4.234)$$

➤ Relația (4.234) este utilizată în practică.

Eroarea cu care se lucrează este nesemnificativă. Spre exemplu, în cazul în care circuitul derivație este compus din piese cu valorile: $L = 150 \mu$; $C = 169 \text{ pF}$, $R = 7.53 \Omega$, rezultă:

➤ conform (4.234) $f_D \approx f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 999.611 \text{ kHz}$

➤ conform (4.230) $f_D = f_0 \sqrt{1 - \frac{1}{Q^2}} = 999.579 \text{ kHz}$

Se observă că la o frecvență de rezonanță apropiată de 1 MHz, în cazul în care factorul de calitate al circuitului este bun, $Q \approx 125$, se obține o eroare de 32 Hz, dacă pentru C.O.D. se consideră că rezonanța se calculează cu formula corespunzătoare circuitului serie.

4.3.2.2. Consecințele fenomenului de rezonanță

Determinarea consecințelor fenomenului de rezonanță în cazul C.O.D. se face în mod asemănător cu tratarea circuitului serie, vezi paragraful 4.2.4.2.

Consecințele rezonanței derivație vor fi determinate pentru cele două expresii ale frecvenței de rezonanță, cea teoretică (4.230), respectiv cea utilizată în practică (4.234).

Calitativ se poate preciza, pentru ambele seturi de calcule, că:

- Impedanța circuitului derivație devine maximă și are caracter pur rezistiv;
- Curentul prin circuit are amplitudinea minimă;
- Curentul prin circuit este în fază cu tensiunea de excitație;

În continuare se vor calcula acești parametri.

1. Parametrii C.O.D. calculați la valoarea teoretică a frecvenței de rezonanță a C.O.D.

$$\omega_D = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{Q^2}};$$

➤ Impedanța circuitului derivație.

Conform (4.228) și (4.229) rezultă că:

$$Z_{D_0} = \frac{R}{(1 - \omega_D^2 LC)^2 + (\omega_D RC)^2} = Q^2 R \quad (4.235)$$

➤ Curentul prin circuit.

Conform (4.211) și (4.235) rezultă că:

$$I_{D_0} = \frac{E}{Z_{D_0}} = \frac{E}{Q^2 R} \quad (4.236)$$

➤ Defazajul dintre curentul din circuit și tensiunea de excitație.

Defazajul se calculează conform (4.228) cu relația:

$$\varphi = \arctg\left(\frac{X_D}{R_D}\right) \quad (4.237)$$

Conform (4.235) și (4.237) rezultă că:

$$\varphi_{D_0} = 0 \quad (4.238)$$

Este util a se calcula și defazajul dintre curentul ce străbate bobina și tensiunea de excitație.

Conform (4.225) și (4.230) rezultă că:

$$\varphi_{L_0} = \arctg\left(\frac{\omega_D L}{R}\right) = \arctg\left(\omega_0 \frac{L}{R} \sqrt{1 - \frac{1}{Q^2}}\right)$$

sau

$$\varphi_{L_0} = \arctg\left(Q \sqrt{1 - \frac{1}{Q^2}}\right) \quad (4.239)$$

2. Parametrii C.O.D. calculați la valoarea utilizată în practică pentru frecvența de rezonanță

$$\omega_D \approx \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

În calculele ce se vor efectua se va considera un circuit cu factor de calitate bun $Q \gg 1$.

➤ Impedanța circuitului derivație.

Conform (4.227) și (4.234) rezultă că:

$$\underline{Z}_{D_0} = \frac{R + j\omega_0 L}{1 - \omega_0^2 LC + j\omega_0 RC} = \frac{R + j\omega_0 L}{j\omega_0 RC} = \frac{\omega_0 L - jR}{\omega_0 RC} = \frac{L}{RC} - j \frac{1}{\omega_0 C} = \frac{L}{RC} \left(1 - jR \sqrt{\frac{C}{L}}\right)$$

sau

$$\underline{Z}_{D_0} = \frac{L}{RC} \left(1 - j \frac{1}{Q}\right) \quad (4.240)$$

Modulul impedanței C.O.D. are expresia:

$$Z_{D_0} \Big|_{\omega_D = \omega_0} = \frac{L}{RC} \sqrt{1 + \frac{1}{Q^2}} = Q^2 R \sqrt{1 + \frac{1}{Q^2}} \quad (4.241)$$

Cum $Q \gg 1$, impedanța la rezonanță a circuitului derivație, numită și rezistență dinamică are expresia:

$$Z_{D_0} \Big|_{\omega_D = \omega_0} \approx \frac{L}{RC} \quad (4.242)$$

Observație:

- Pentru a obține o rezistență dinamică de valoare cât mai mare, trebuie ca:
 - L/C să aibă valoare cât mai mare;
 - R (rezistența de pierderi) să aibă valoare cât mai mică.
- Prin prelucrarea (4.242), utilizând (4.115), impedanța la rezonanță a C.O.D. poate avea următoarele expresii (utile în practică):

$$Z_{D_0} \Big|_{\omega_D = \omega_0} \approx Q^2 R \quad (4.243)$$

$$Z_{D_0} \Big|_{\omega_D = \omega_0} \approx \frac{Z_C^2}{R} \quad (4.244)$$

unde Z_C este impedanța caracteristică a circuitului serie (construit, bineînțeles cu aceeași bobină și condensator).

- Curentul prin circuit.

Conform (4.211) și (4.241) rezultă că:

$$I_{D_0} \Big|_{\omega_D = \omega_0} = \frac{E}{\frac{L}{RC} \sqrt{1 + \frac{1}{Q^2}}} = \frac{1}{Q^2} \frac{E}{\sqrt{1 + \frac{1}{Q^2}}} R \quad (4.245)$$

Aplicând și în acest caz observația referitoare la calitatea bună a circuitului, conform (4.243) și (4.244), expresia curentului din întreg circuitul (curentul debitat de generator) devine:

$$I_{D_0} \Big|_{\omega_D = \omega_0} \approx \frac{1}{Q^2} \frac{E}{R} \quad (4.246)$$

$$I_{D_0} \Big|_{\omega_D = \omega_0} \approx E \frac{R}{Z_C^2} \quad (4.247)$$

- Defazaajul dintre curentul din circuit și tensiunea de excitație.

Conform (4.237) și (4.240) rezultă că:

$$\varphi_{D_0} \Big|_{\omega_D = \omega_0} = \arctg\left(\frac{1}{Q}\right) \quad (4.248)$$

Defazaajul dintre curentul ce străbate bobina și tensiunea de excitație se determină aplicând în (4.225) condiția (4.234), rezultând că:

$$\varphi_{L_0} \Big|_{\omega_D = \omega_0} = \arctg\left(\frac{\omega_0 L}{R}\right) = \arctg(Q) \quad (4.249)$$

În tabelul 4.3.1. se prezintă comparativ expresiile principalilor parametri ce caracterizează la rezonanță C.O.D. În practică se utilizează expresiile parametrilor calculate pentru cazul în care circuitul are un factor de calitate bun ($Q \gg 1$).

Ilustrarea grafică a fenomenului de rezonanță pentru circuitul derivație este exemplificată în figura 4.49 unde este prezentată diagrama fazorială asociată curenților din circuit.

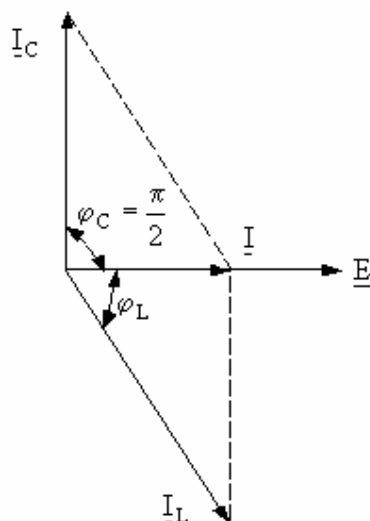


Fig.4.49.Diagrama fazorială pentru curenți, asociată C.O.D. în cazul rezonanței

Determinarea frecvenței de rezonanță a implicat următorul algoritm:

- Scrierea impedanței întregului circuit;
- Deducerea frecvenței de rezonanță prin egalarea cu zero a reactanței (părții imaginare a impedanței) circuitului;
- Reanalizarea comportării circuitului la frecvența dedusă anterior și stabilirea consecințelor rezonanței.

Consecințele, referitoare doar la curentul din circuit sunt următoarele:

- Amplitudinea este minimă;
- Este în fază cu tensiunea de excitație.

În acest demers s-a considerat că valorile pieselor ce compun circuitul sunt constante, variabilă fiind doar frecvența semnalului de excitație. În practică circuitele derivație trebuie acordate, adică modificate valorile inductanței bobinei sau capacității condensatorului, astfel încât circuitul să fie la rezonanță, pe o anumită frecvență. Se consideră că circuitul este la rezonanță atunci când curentul este minim și în fază cu tensiunea de excitație.

În continuare se va prezenta, prin intermediul a două exemple, modalitatea teoretică prin care un C.O.D. este adus la rezonanță.

A) Acordarea C.O.D. prin modificarea valorii capacității condensatorului

Se presupune că:

- E, amplitudinea tensiunii de excitație este constantă;
- Frecvența tensiunii de excitație este constantă: $\omega = \text{ct.}$
- L, inductanța bobinei este constantă;
- R, pierderile din circuit constante;
- C, capacitatea condensatorului este **variabilă**.

Scopul acestei discuții este de a afla valoarea capacității condensatorului pentru care circuitul este la rezonanță. Pentru atingerea acestui scop se se urmează algoritmul:

1. Construirea diagramei fazoriale

Diagrama fazorială asociată curenților din circuit în cazul acordării C.O.D. prin intermediul unui condensator variabil este prezentată în figura 4.50.

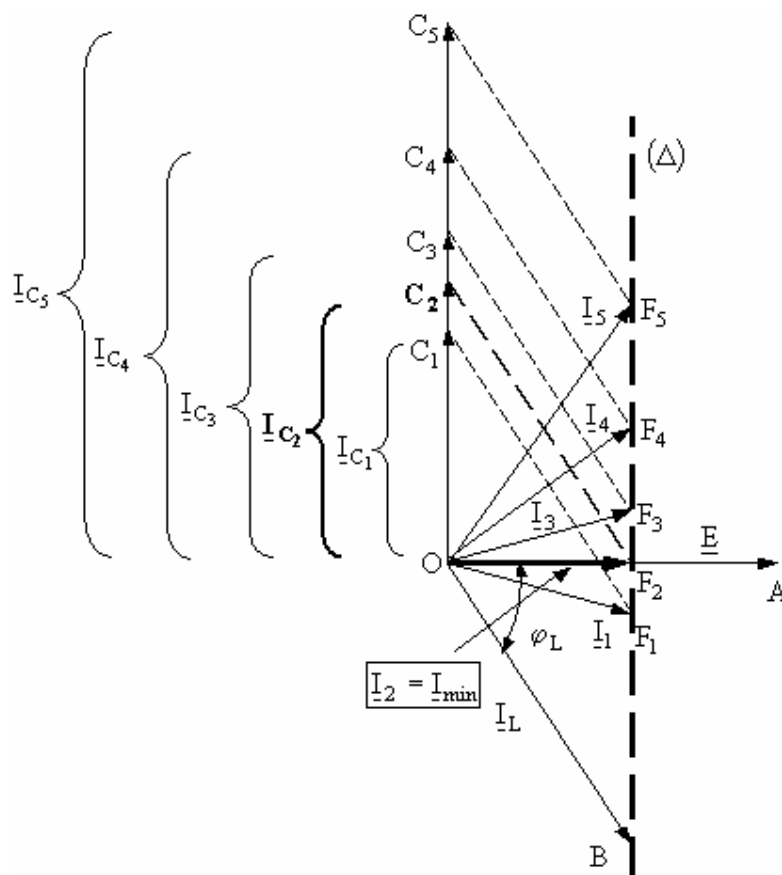


Fig.4.50. Diagrama fazorială pentru curenți, asociată unui C.O.D, în cazul aducerii la rezonanță cu ajutorul unui condensator variabil

Tabelul 4.3.1

	Parametrii C.O.D. calculați la valoarea teoretică a frecvenței de rezonanță a C.O.D	Parametrii C.O.D. calculați la valoarea utilizată în practică pentru frecvența de rezonanță	Parametrii C.O.D. calculați pentru un circuit cu factor de calitate bun: $Q \gg 1$	Parametrii C.O.D. calculați pentru un circuit ideal: $R = 0$
Frecvența de rezonanță a C.O.D.	$\omega_D = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{Q^2}}$	$\omega_D \approx \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$	$\omega_D = \frac{1}{\sqrt{LC}}$	$\omega_D = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
Impedanța C.O.D. la rezonanță	$Z_{D_0} = Q^2 R$	$Z_{D_0} \Big _{\omega_0 = \omega_D} = Q^2 R \sqrt{1 + \frac{1}{Q^2}}$	$Z_{D_0} = Q^2 R$	$Z_{D_0} = \infty$
Curentul total al C.O.D. la rezonanță	$I_{D_0} = \frac{1}{Q^2} \frac{E}{R}$	$I_{D_0} \Big _{\omega_0 = \omega_D} = \frac{1}{Q^2} \frac{E}{\sqrt{1 + \frac{1}{Q^2}} R}$	$I_{D_0} = \frac{1}{Q^2} \frac{E}{R}$	$I_{D_0} = 0$
Defazajul dintre curentul total și tensiunea de excitație al C.O.D. la rezonanță	$\varphi_{D_0} = 0$	$\varphi_{D_0} \Big _{\omega_0 = \omega_D} = \arctg\left(\frac{1}{Q}\right)$	$\varphi_{D_0} = 0$	$\varphi_{D_0} = 0$
Defazajul dintre curentul prin bobină și tensiunea de excitație al C.O.D. la rezonanță	$\varphi_{L_0} = \arctg\left(Q \sqrt{1 - \frac{1}{Q^2}}\right)$	$\varphi_{L_0} \Big _{\omega_0 = \omega_D} = \arctg(Q)$	$\varphi_{L_0} \rightarrow \frac{\pi}{2}$	$\varphi_{L_0} = \frac{\pi}{2}$

Pentru a ridica această diagramă fazorială s-a ținut cont de următoarele observații:

- fazorul OA (asociat mărimii \underline{E}) este fix, deoarece:
 - tensiunea de excitație s-a luat ca origine de fază;
 - amplitudinea tensiunii de excitație este constantă.
- fazorul OB (asociat mărimii \underline{I}_L) este fix, deoarece:
 - conform (4.224) amplitudinea curentului prin bobină este constantă,

$$I_L = \frac{E}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}};$$

- conform (4.225) curentul prin bobină este defazat în urma tensiunii de excitație cu unghiul de valoare constantă $\varphi_L = \arctg(\omega L/R)$

- fazorul OC (asociat mărimii \underline{I}_C) este variabil (ca modul), deoarece:

- conform (4.223) amplitudinea curentului prin condensator este variabilă,

$$I_C = \omega C E;$$

- conform (4.222) curentul prin condensator este defazat înaintea tensiunii de excitație cu unghiul de valoare constantă $\varphi_C = \frac{\pi}{2}$.

În concluzie modulul (lungimea) fazorului OC crește odată cu valoarea capacității C , conform (4.223) $\underline{OC} = \underline{OC}_k$; $k = 1, 2, 3, \dots$

➤ fazorul OF (asociat mărimii $\underline{I} = \underline{I}_C + \underline{I}_L$) este variabil atât ca modul cât și ca defazaj (față de tensiunea de excitație), deoarece conform (4.226) curentul prin circuit este suma curenților din bobină, respectiv condensator ($i = i_L + i_C$).

Variația fazorului OF, asociat curentului din circuit \underline{I} este ilustrată în figura 4.50 astfel:

- Pentru diverse valori $C_1 < C_2 < C_3 < C_4 < \dots$ ale capacității C a condensatorului se obțin diverse valori pentru (amplitudinea) curentului(ui) \underline{I}_C , astfel: $I_{C_1} < I_{C_2} < I_{C_3} < I_{C_4} < \dots$. Pentru a obține fazorul asociat curentului din circuit se utilizează regula paralelogramului (de adunare a vectorilor), rezultând diverse valori: $\underline{I}_1; \underline{I}_2; \underline{I}_3; \underline{I}_4 \dots$

- Locul geometric al vârfulor fazorului OF ($F_1; F_2; F_3; F_4 \dots$), când capacitatea C variază, este dreapta (Δ) dusă prin punctul B paralel cu axa Oy .

2. Ilustrarea fenomenului de rezonanță în diagrama fazorială

Deoarece la rezonanță amplitudinea curentului $\underline{I} = \underline{I}_C + \underline{I}_L$ este minimă, rezultă că $\underline{OF} \equiv \underline{OF}_2$ (proiecția fazorului pe axa Ox este egală cu fazorul). Se observă că dacă $\underline{I}_2 = \underline{OF} \equiv \underline{OF}_2$ defazajul curentului față de tensiunea de excitație este nul.

3. Determinarea valorii capacității condensatorului C la acordarea circuitului (se obține valoarea minimă a curentului din circuit)

Fie C_0 capacitatea de acord a condensatorului, corespunzătoare rezonanței.

Conform (4.225) rezultă că:

$$\cos \varphi_L = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \quad (4.250)$$

Din figura 4.50 rezultă că:

$$\sin \varphi_L = \frac{|OB_2|}{|OC|} = \frac{|I_{C_2}|}{|I_C|} = \frac{\omega C_0 E}{\frac{E}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}} = \omega C_0 \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \quad (4.251)$$

Cum $\sin^2 \varphi_L + \cos^2 \varphi_L = 1$ din (4.250) și (4.251) rezultă că:

$$\omega^2 C_0^2 [R^2 + (\omega L)^2] + \frac{R^2}{R^2 + (\omega L)^2} = 1 \Rightarrow \omega^2 C_0^2 [R^2 + (\omega L)^2] = \frac{(\omega L)^2}{R^2 + (\omega L)^2} \Rightarrow$$

$$C_0 = \frac{L}{R^2 + (\omega L)^2} \quad (4.252)$$

B) Acordarea C.O.D. prin modificarea valorii inductanței bobinei

Se presupune că:

- E, amplitudinea tensiunii de excitație este constantă;
- Frecvența tensiunii de excitație este constantă: $\omega = \text{ct.}$;
- C, capacitatea condensatorului este constantă;
- R, pierderile din circuit constante;
- L, inductanța bobinei este variabilă.

Scopul acestei discuții este de a afla valoarea inductanței bobinei pentru care circuitul este la rezonanță. Pentru a atinge acest scop se urmează un algoritm identic cu cel utilizat la acordarea circuitului prin intermediul condensatorului.

1. Construirea diagramei fazoriale

Diagrama fazorială asociată curenților din circuit în cazul acordării C.O.D. prin intermediul unei bobine variabile este prezentată în figura 4.51.

Pentru a ridica această diagramă fazorială s-a ținut cont de următoarele observații:

- fazorul \underline{OA} (asociat mărimii \underline{E}) este fix, deoarece:
 - tensiunea de excitație s-a luat ca origine de fază;
 - amplitudinea tensiunii de excitație este constantă.
- fazorul \underline{OC} (asociat mărimii $\underline{I_C}$) este fix, deoarece:
 - conform (4.223) amplitudinea curentului prin condensator este constantă, $I_C = \omega CE$;
 - conform (4.222) curentul prin condensator este defazat înaintea tensiunii de

excitație cu unghiul de valoare constantă $\varphi_C = \frac{\pi}{2}$.

➤ fazorul \underline{OB} (asociat mărimii \underline{I}_L) este variabil (ca modul și direcție), deoarece:

- conform (4.224) amplitudinea curentului prin bobină este variabilă,

$$\underline{I}_L = \frac{E}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}};$$

• conform (4.225) curentul prin bobină este defazat în urma tensiunii de excitație cu unghiul de valoare variabilă $\varphi_L = \arctg\left(\frac{\omega L}{R}\right)$

➤ fazorul \underline{OF} (asociat mărimii $\underline{I} = \underline{I}_C + \underline{I}_L$) este variabil atât ca modul cât și ca defazaj (față de tensiunea de excitație), deoarece conform (4.226) curentul prin circuit este suma curenților din bobină, respectiv condensator ($i = i_L + i_C$).

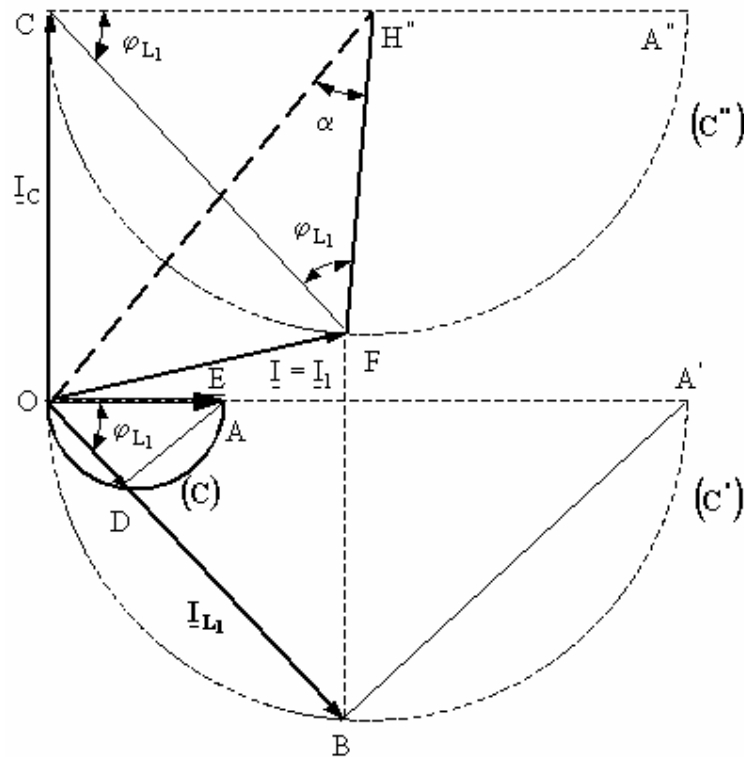


Fig.4.51. Diagrama fazorială pentru curenți, asociată C.O.D. în cazul în care inductanța bobinei este variabilă

Pentru a preciza care este locul geometric al vârfurilor fazorului \underline{OF} se procedează astfel:

1a) Se determină locul geometric al vârfurilor fazorului \underline{OD}

Fazorul \underline{OD} este asociat pierderilor rezistive din circuit (este asociat tensiunii de pe rezistența R ce echivalează pierderile din circuit).

Se poate scrie că $\underline{OD} = R \cdot \underline{I}_L$ (corespunzător unei valori oarecare L_1 , a inductanței bobinei).

Conform (4.211) $e = u_L + u_R$ sau

$$\underline{E} = R \cdot \underline{I}_{L_1} + j\omega L \underline{I}_{L_1} \quad (4.253)$$

Expresiei (4.253) i se asociază în diagrama fazorială din figura 4.51 următoarea relație:

$$\underline{OA} = \underline{OD} + \underline{DA}, \text{ unde } |\underline{OA}| = ct. \text{ și } \angle ODA = \frac{\pi}{2} \quad (4.254)$$

Conform (4.254) rezultă că locul geometric la punctului D (vârful fazorului \underline{OD}) este un semicerc (\underline{C}) de diametru $|\underline{OA}| = ct.$

1b) Se determină locul geometric al vârfurilor fazorului \underline{OB}

Cum fazorul \underline{OB} este asociat curentului din bobină, conform relației $\underline{OD} = R \cdot \underline{I}_{L_1}$, rezultă că:

$$\underline{OB} = \frac{\underline{OD}}{R} \text{ (} \underline{OB} \text{ și } \underline{OD} \text{ sunt firec în fază)} \quad (4.255)$$

În baza relației (4.255) rezultă că locul geometric al punctului B (vârful fazorului \underline{OB}) este un semicerc (\underline{C}'), omotetic cu cel descris de punctul D, de diametru $|\underline{OA}'| = \frac{|\underline{OA}|}{R} = ct.$

Se reamintește că se numește omotetie de centru O și raport k o transformare H care asociază fiecărui punct M punctul $M' = H(M)$ astfel încât $OM' = k \cdot OM$. În cazul de față raportul k este asociat cu rezistența de pierderi R a circuitului. (Pentru o reprezentare grafică mai clară s-a ales ca $|\underline{OB}| > |\underline{OD}|$.)

1c) Se determină locul geometric al vârfurilor fazorului \underline{OF}

Relația

$$\underline{OF} = \underline{OB} + \underline{OC} \quad (4.256)$$

ce este echivalentă cu $\underline{I} = \underline{I}_C + \underline{I}_L$, arată că locul geometric al punctului F este tot un semicerc (\underline{C}''), dedus din locul geometric al punctului B, printr-o translație egală cu \underline{OC} (\underline{OC} este constant ca mărime și direcție). Se notează cu H'' centrul semicercului (\underline{C}'').

Fazorul \underline{OF} , asociat curentului din circuit \underline{I} este ilustrat în figura 4.51 pentru o valoare oarecare L_1 , a inductanței bobinei.

2. Ilustrarea fenomenului de rezonanță în diagrama fazorială

Deoarece la rezonanță amplitudinea curentului $\underline{I} = \underline{I}_C + \underline{I}_L$ este minimă, rezultă că trebuie îndeplinită condiția: $|\underline{OF}| = \min$.

Grafic, valoarea minimă a fazorului \underline{OF} rezultă din reprezentarea din figura 4.51, conform relației:

$$|\underline{OF}|^2 = |\underline{OH}''|^2 + |\underline{FH}''|^2 - 2|\underline{OH}''| \cdot |\underline{FH}''| \cdot \cos \alpha \quad (4.257)$$

Deoarece semicercul (C'') și implicit centrul său H'' sunt fixe rezultă că:

$$\begin{cases} |OH''| = ct \\ |FH''| = ct. \end{cases}$$

Pentru ca fazorul OF să fie minim trebuie, conform (4.257), ca $\alpha = 0$.

Diagrama diagrama fazorială asociată fenomenului de rezonanță a curenților din circuit în cazul acordării C.O.D. prin intermediul unei bobine variabile este prezentată în figura 4.52.

Se observă că în acest caz punctele O, F și H'' sunt coliniare.

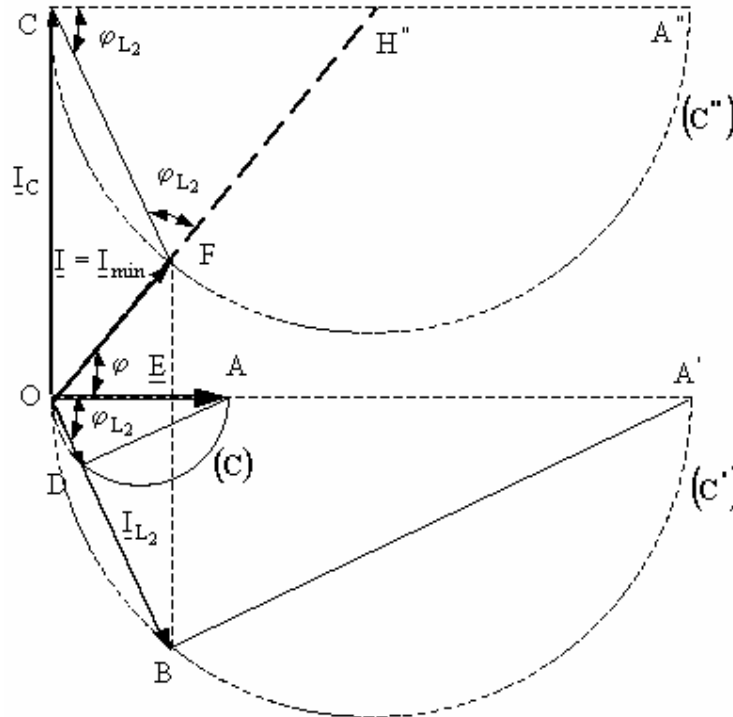


Fig.4.52. Diagrama fazorială asociată fenomenului de rezonanță pentru curenți din circuit în cazul acordării C.O.D. prin intermediul unei bobine variabile

3. Determinarea valorii inductanței bobinei L la acordarea circuitului (se obține valoarea minimă a curențului din circuit)

Fie L_0 inductanța de acord a bobinei, corespunzătoare rezonanței.

Conform (4.225) rezultă că:

$$\operatorname{tg}(\varphi_L) = \frac{\omega L_0}{R} \tag{4.258}$$

Din figura 4.52 se observă că:

$$\begin{aligned} \angle AOD = \varphi_L; \angle AOD = \angle FCH''; \Delta FCH'' \text{ isoscel } (|FH''| = |CH''|) \Rightarrow \\ \angle CFH'' = \angle FCH'' = \varphi_L \Rightarrow \angle CH''F = \pi - 2\varphi_L \end{aligned} \tag{4.259}$$

Din (4.258) și (4.259) rezultă că:

$$\operatorname{tg}(\angle \text{CH}''\text{F}) = \operatorname{tg}(\pi - 2\varphi_L) = -\operatorname{tg}(2\varphi_L) = -\frac{2\operatorname{tg}(\varphi_L)}{1 - \operatorname{tg}^2(2\varphi_L)} = \frac{2R\omega L_0}{\omega^2 L_0^2 - R^2} \quad (4.260)$$

În $\Delta \text{OCH}''$ se poate scrie:

$$\operatorname{tg}(\angle \text{CH}''\text{F}) = \frac{|\text{OC}|}{|\text{CH}''|} = \frac{|\text{OC}|}{\frac{|\text{CA}''|}{2}} = \frac{|\text{OC}|}{\frac{|\text{OA}'|}{2}} = \frac{|\text{OC}|}{2R} = \frac{|\text{I}_C|}{2R} = \frac{E\omega C}{E} = 2R\omega C \quad (4.261)$$

Din (4.260) și (4.261) se obține ecuația:

$$\frac{2R\omega L_0}{\omega^2 L_0^2 - R^2} = 2R\omega C \Rightarrow \frac{L_0}{\omega^2 L_0^2 - R^2} = C \Rightarrow \omega^2 L_0^2 C - L_0 - CR^2 = 0$$

a cărei soluție are forma:

$$L_0 = \frac{1 + \sqrt{1 + 4\omega^2 R^2 C^2}}{2\omega^2 C} \quad (4.262)$$

Conform definiției (4.33) a factorului de calitate al condensatorului, $Q_C = \frac{1}{\omega RC}$, valoarea inductanței bobinei devine:

$$L_0 = \frac{1 + \sqrt{1 + \frac{4}{Q^2}}}{2\omega^2 C} \quad (4.263)$$

Observație:

➤ Pentru valoarea (4.263) a inductanței bobinei (pentru care curentul este minim), există un defazaj între curentul total și tensiunea de excitație, a cărei valoare se determină conform (4.228) astfel:

$$\begin{aligned} \varphi|_{L_0} &= \operatorname{arctg}\left(\frac{X_{D|L_0}}{R_{D|L_0}}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{\omega(L_0 - \omega^2 L_0^2 C) - \omega R^2 C}{R}\right) \Rightarrow \\ \varphi|_{L_0} &= \operatorname{arctg}(-\omega RC) = -\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{Q}\right) \end{aligned} \quad (4.264)$$

Pe reprezentarea din figura 4.52, defazajul $\varphi|_{L_0}$ a fost desenat, pentru o mai bună claritate, exagerat de mare.

Pentru cazul practic în care $Q \gg 1$ se poate scrie că:

$$\begin{cases} L_0 \approx \frac{1}{\omega^2 C} \\ \varphi|_{L_0} \approx 0 \end{cases} \quad (4.265)$$

4.3.2.3. Rezonanța curenților. Supraintensități

În paragraful 4.3.2.2 s-a discutat, în detaliu, despre fenomenul de rezonanță pentru un C.O.D. Se observă că circuitul poate fi adus la rezonanță (curentul total din circuit de amplitudine minimă și în fază cu tensiunea de excitație) prin modificarea (variația) unuia din cei trei parametri: frecvența generatorului (ω), inductanța bobinei L , sau capacitatea condensatorului, C .

➤ Dacă circuitul este dat (valorile bobinei și condensatorului sunt constante), aducerea circuitului la rezonanță constă în modificarea frecvenței generatorului până când aceasta devine apropiată (cvasiegală) de frecvența oscilațiilor proprii ale circuitului

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \text{ Această frecvență a fost notată cu } \omega_D.$$

➤ Dacă frecvența generatorului este dată (fixă) aducerea circuitului la rezonanță (acordarea) constă în modificarea inductanța bobinei L , sau a capacității condensatorului C , până când curentul total din circuit devine minim. Aceste valori au fost notate cu L_0 , respectiv C_0 .

Pentru ambele variante se constată că la rezonanță, pentru un circuit cu factor de calitate bun, $Q \gg 1$, sunt valabile (**cu o foarte bună aproximație**) următoarele:

1. Frecvența curentului ce străbate C.O.D. este egală cu frecvența oscilațiilor proprii ale circuitului și implicit cu frecvența de rezonanță a unui C.O.S. (realizat din aceleași piese)

$$\omega_D = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (4.266)$$

2. Impedanța C.O.D. este maximă:

$$Z_{D_0} = Q^2 R \quad (4.267)$$

3. Curentul total din C.O.D. este minim, fiind în fază cu tensiunea de excitație:

$$I_{D_0} = \frac{1}{Q^2} \frac{E}{R} \quad (4.268)$$

$$\varphi_{D_0} = 0 \quad (4.269)$$

Se reamintește că în cazul unui C.O.S., la rezonanță impedanța circuitului este minimă, apărând fenomenul de supratensiune (tensiunile la bornele bobinei, respectiv condensatorului sunt de Q ori mai mari decât tensiunea de excitație).

Deoarece în cazul C.O.D. impedanța circuitului este maximă se va purta o discuție referitoare la amplitudinile curenților din cele două ramuri (ramura de circuit ce conține condensatorul, respectiv ramura de circuit ce conține bobina).

Conform (4.266) la rezonanță, reactanțele bobinei, respectiv condensatorului sunt egale

$$\begin{cases} X_{C_D} = \frac{1}{\omega_D C} = \sqrt{\frac{L}{C}} \\ X_{L_D} = \omega_D L = \sqrt{\frac{L}{C}} \end{cases} \Rightarrow X_{C_D} = X_{L_D} \quad (4.270)$$

Expresiile curenților, la rezonanță devin:

$$I_{C_D} = \frac{E}{X_{C_D}} = \frac{E}{X_{L_D}} = \frac{E}{\omega_D L} \quad (4.271)$$

$$I_{L_D} = \frac{E}{\sqrt{R^2 + X_{L_D}^2}} = \frac{E}{\sqrt{R^2 + (\omega_D L)^2}} = \frac{E}{\omega_D L \sqrt{1 + \frac{1}{Q^2}}} \approx \frac{E}{\omega_D L} \quad (4.272)$$

Expresia curentului total din circuit, conform (4.268) devine:

$$I_{D_0} = \frac{1}{Q^2} \frac{E}{R} = \frac{1}{Q} \frac{E}{QR} = \frac{E}{Q \omega_0 LR} = \frac{1}{Q} \frac{E}{\omega_D L} \quad (4.273)$$

Din (4.271), (4.272) și (4.273) rezultă că:

$$I_{L_D} = I_{C_D} = Q I_{D_0} \quad (4.274)$$

Observație:

➤ Amplitudinile curenților prin bobină, respectiv condensatorul sunt mult mai mari decât amplitudinea curentului total, putând spune că la rezonanță C.O.D. “amplifică” de Q – ori curentul sursei ce-l excită.

➤ La rezonanță, curenții I_L și I_C au amplitudini **aproape** egale, variind **aproape** în antifază.

Conform (4.249), defazajul dintre curentul ce străbate bobina și tensiunea de excitație are expresia: $\varphi_{L_D} = \arctg(Q)$, sau

$$\cos(\varphi_{L_D}) = \frac{1}{\sqrt{1+Q^2}} = \frac{1}{Q \sqrt{1+\frac{1}{Q^2}}} \approx \frac{1}{Q} \quad (4.275)$$

Observație:

➤ În cazul ideal în care pierderile ar fi nule ($R = 0$) curenții ce străbat bobina și condensatorul ar avea amplitudini egale și ar oscila în antifază. De asemenea curentul total din circuit ar fi nul.

Diagrama fazorială asociată curenților din circuit la rezonanță atât pentru cazul real cât și pentru cel ideal sunt prezentate în figura 4.53.

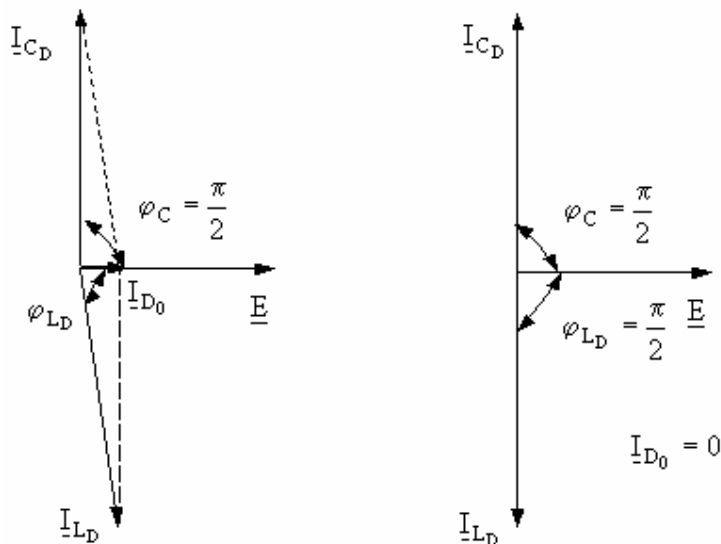


Fig.4.53.Diagrama fazorială pentru curenți, asociată C.O.D. în cazul rezonanței
 a) caz real ($R \neq 0$); b) caz ideal ($R = 0$)

Observație:

➤ Curenții din bobină și condensator, în aparență antagoniști, reprezintă, de fapt unul și același circuit oscilant, cu circulație locală, limitată doar la circuitul L, C, R.

Curentul de circulație interioară (I_L sau I_C) este rezultatul exclusiv al procesului oscilant liber din circuitul L, C, R. Contribuția generatorului se reduce doar la completarea pierderilor de energie din perioada precedentă.

Pentru ca intervenția generatorului în desfășurarea oscilant să fie pozitivă, în sensul întreținerii oscilațiilor, trebuie ca injectarea energiei în circuit să aibă loc la timpul și în sensul potrivit, în concordanță cu oscilațiile libere din circuit. În caz contrar intervenția este inoportună și duce la stingerea oscilațiilor libere.

Diagrama liniară (forma de undă) a curenților din C.O.D. la rezonanță este reprezentată în figura 4.54.

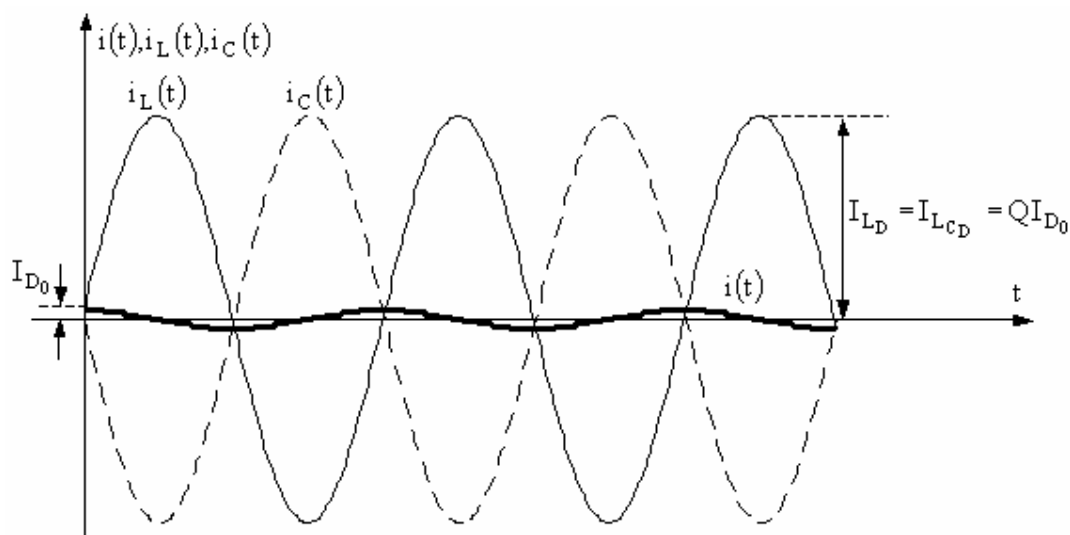
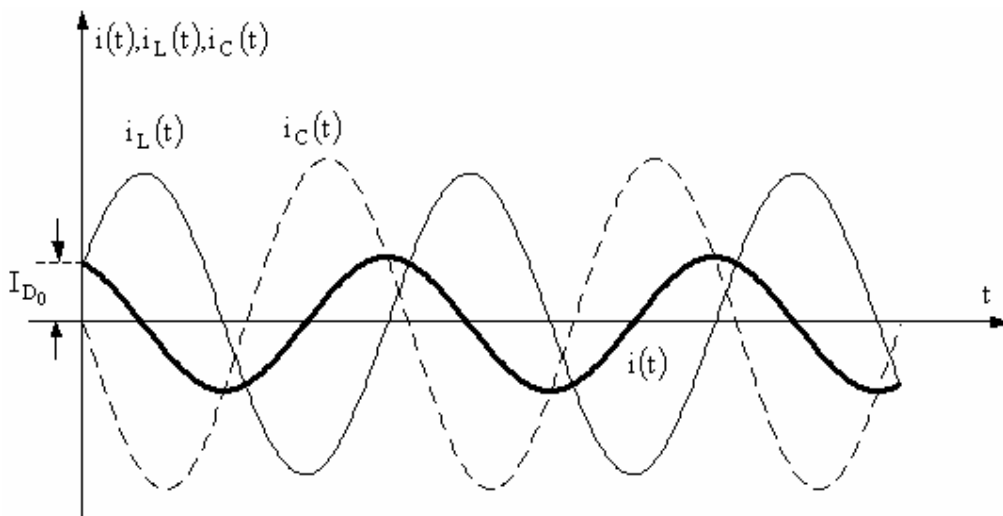


Fig.4.54. Variația curenților din C.O.D. în cazul rezonanței $Q \gg 1$

Datorită pierderilor mari, ($Q \approx 1$), chiar la “rezonanță”, $\left(\omega_D = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \right)$, cei doi curenți ($I_L ; I_C$) nu mai sunt atât de vizibil egali (în amplitudine) și în antifază.

Spre exemplu dacă rezistența de pierderi (corespunzătoare C.O.D. a cărei rezonanță este exemplificată în figura 4.54) se mărește de 10 ori, fără a modifica alți parametri ai circuitului evoluția în timp a curenților este prezentată în figura 4.55.

Fig.4.55. Variația curenților din C.O.D. în cazul rezonanței $Q \approx 1$

4.3.2.4. Curba de rezonanță

Pentru a ridica curba de rezonanță sau caracteristica de frecvență a C.O.D. se utilizează relația matematică ce leagă impedanța circuitului derivație de cel serie. Conform (4.96) și (4.227) se poate scrie că:

$$\underline{Z}_D = \frac{\frac{1}{j\omega C} (R + j\omega L)}{\frac{1}{j\omega C} + R + j\omega L} = \frac{\frac{L}{C} - j\frac{R}{\omega C}}{\underline{Z}_S} = \frac{L}{C} \frac{1 - j\frac{R}{\omega L}}{\underline{Z}_S} \Rightarrow$$

$$\underline{Z}_D = \frac{L}{C} \frac{1 - j\frac{1}{\omega Q}}{\underline{Z}_S} \quad (4.276)$$

Expresia impedanței derivație poate fi simplificată în cazul (în general întâlnit în practică) în care $Q \gg 1$.

Se poate scrie că:

$$\underline{Z}_D \approx \frac{L}{C} \frac{1}{\underline{Z}_S} \quad (4.277)$$

Curentul total din circuit va avea expresia:

$$\underline{I} = \frac{E}{\underline{Z}_D} \approx \frac{E}{\frac{L}{C} \underline{Z}_S} \quad (4.278)$$

Prin urmare comportarea circuitului derivație, la diverse frecvențe, poate fi dedusă din cea a circuitului serie.

Spre exemplu, caracteristica de frecvență a C.O.D., $Z_D = Z_D(f)$ este prezentată în figura 4.56

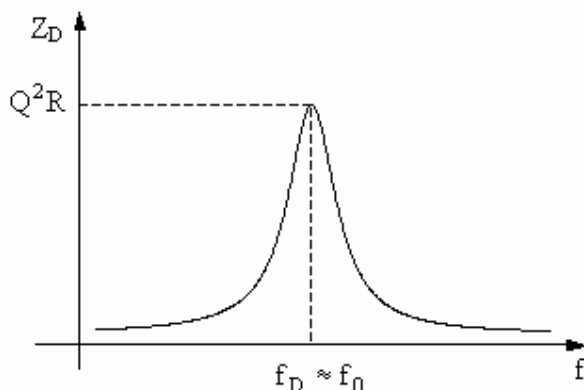


Fig.4.56 Caracteristica de frecvență a C.O.D.

4.3.3. Selectivitatea C.O.D.

4.3.3.1. Ecuația curbei de selectivitate

Eficacitatea de filtrare a curenților, după frecvență se apreciază la circuitul derivație prin raportul dintre amplitudinea minimă I_{D_0} a curentului total din circuit, la rezonanță și amplitudinea I a aceluiași curent la o frecvență oarecare:

$$s_I = \frac{I_{D_0}}{I} \Big|_{E=\text{const.}} \quad (4.279)$$

Expresia selectivității în curent devine:

$$s_I = \frac{I_{D_0}}{I} = \frac{\frac{E}{Z_{D_0}}}{\frac{E}{Z_D}} = \frac{Z_D}{Z_{D_0}} \stackrel{(4.278)}{=} \frac{\frac{L}{C} \frac{1}{Z_S}}{\frac{L}{C} \frac{1}{Z_0}} = \frac{Z_0}{Z_S} \stackrel{(4.130)}{=} \frac{R}{R\sqrt{1+(\beta Q)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+(\beta Q)^2}} \quad (4.280)$$

Se observă că expresia (4.280) este identică cu expresia (4.143) ce definește selectivitatea în curent a C.O.S.

Concluzie:

➤ Selectivitatea circuitului derivație are aceeași expresie ca și selectivitatea circuitului serie.

Din acest motiv nu se mai fac aprecieri asupra dezvoltărilor matematice ale selectivității (departe sau în apropierea frecvenței de rezonanță) sau a eventualelor ei semnificații fizice.

4.3.3.2. Banda de trecere

Conform celor stabilite în paragraful 4.2.5.3 prin bandă de trecere se înțelege banda de frecvență la limitele căreia tensiunea (în cazul circuitului serie), respectiv curentul (în cazul circuitului derivație) scad la 0.707 din valoarea de la rezonanță. Nivelul standard la

care se determină banda este deci $s = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $a = 3\text{dB}$.

Ca și în cazul circuitului serie și pentru circuitul derivație lățimea de bandă are expresia:

$$B_{3\text{dB}} = \frac{f_0}{Q} \quad (4.281)$$

5. CIRCUITE DE PRELUCRARE A IMPULSURILOR

Când un sistem electric trece de la o stare de regim la alta (schimbări de sarcină, întreruperi sau restabiliri de circuite...), schimbarea de stare este însoțită de fenomene de comutație.

Circuitele de comutație se caracterizează prin faptul că tensiunile sau curenții sunt modificați brusc între nivelele prestabilite, pe care pot rămâne un timp bine determinat sau oricât de mare. Aceste circuite se folosesc în calculatoare numerice, televiziune, sisteme de telecomunicații și radar, instrumente și aparate destinate acelor sisteme la care datele sosesc sub formă de impulsuri.

În circuitele de impulsuri și comutație se dorește adeseori să se obțină semnale de diferite forme (triunghiulare, exponențiale, liniar variabile în timp,...). Pornind de la un semnal dreptunghiular se pot genera formele de undă dorite cu ajutorul unor circuite elementare pasive.

5.1. Comportarea în c.c. a circuitelor R, L și R, C serie

5.1.1. Circuitul R, L serie în c.c.

Schema circuitului R, L serie în c.c. este prezentată în figura 5.1

Observație:

➤ Rezistența R este rezistența activă a întregului circuit serie, reprezentând suma rezistențelor de pierderi ale condensatorului, firelor de conexiune și a sursei de c.c.

5.1.1.1. Stabilirea curentului prin circuit.

Comutatorul K_1 închis, respectiv K_2 deschis. În acest caz rezistorul R și bobina L sunt conectate la sursa de tensiune continuă E.

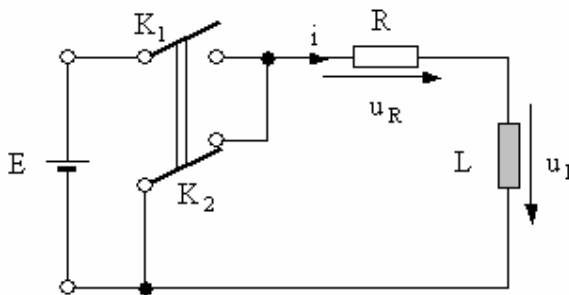


Fig.5.1 Circuitul R, L serie în c.c

Pentru a determina expresiile curentului și a tensiunilor, se scriu ecuațiile ce descriu circuitul.

$$\begin{cases} u_R = R i \\ u_L = L \frac{di}{dt} \\ E = u_R + u_L \end{cases} \quad (5.1)$$

condiția inițială fiind:

$$i(0) = 0 \quad (5.2)$$

Determinarea expresiilor tensiunilor și a curentului prin circuit impune rezolvarea unei ecuații diferențiale unei ecuații diferențiale neomogene de gradul I, ce are forma:

$$L \frac{di}{dt} + Ri = E \quad (5.3)$$

sau

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{E}{L} \quad (5.4)$$

Se rezolvă inițial ecuația omogenă

$$\frac{di}{dt} + \frac{1}{\tau}i = 0 \quad (5.5)$$

unde

$$\tau = \frac{L}{R} \quad (5.6)$$

este constanta de timp a circuitului.

Observație:

- Se poate arăta simplu că această constantă de timp se măsoară în secunde.

$$[\tau] = \frac{[L]}{[R]} = \frac{H}{\Omega} = \frac{Wb/A}{V/A} = \frac{Wb}{V} = \frac{V \cdot s}{V} = s$$

Soluția ecuației omogene este:

$$i(t) = K e^{-\frac{1}{\tau}t} \quad (5.7)$$

unde K este constanta de integrare.

Pentru a rezolva ecuația neomogenă (5.4) se aplică metoda variației constantelor:

Se consideră ca variabilă, constanta K și în consecință, $K \rightarrow K(t)$.

În acest caz soluția ecuației devine:

$$i(t) = K(t) e^{-\frac{1}{\tau}t} \quad (5.8)$$

Cum această soluție generală verifică ecuația neomogenă (5.4), rezultă că:

$$K'(t) e^{-\frac{1}{\tau}t} - \frac{1}{\tau} K(t) e^{-\frac{1}{\tau}t} + \frac{1}{\tau} K(t) e^{-\frac{1}{\tau}t} = \frac{E}{L} \Rightarrow K'(t) = \frac{E}{L} e^{\frac{1}{\tau}t}$$

de unde rezultă că:

$$K(t) = \frac{E}{L} \tau e^{\frac{1}{\tau}t} + K_1 = \frac{E}{R} e^{\frac{1}{\tau}t} + K_1 \quad (5.9)$$

Din (5.7) și (5.9) rezultă că:

$$i(t) = K e^{-\frac{1}{\tau}t} = \frac{E}{R} + K_1 e^{-\frac{1}{\tau}t} \quad (5.10)$$

din condiția inițială $i(0) = 0$ rezultă că $K_1 = -\frac{E}{R}$, în final obținându-se că:

$$i(t) = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{1}{\tau}t} \right) \quad (5.11)$$

Notând

$$I_{MAX} = \frac{E}{R} \quad (5.12)$$

expresia curentului prin circuit devine:

$$i(t) = I_{MAX} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \quad (5.13)$$

Tensiunile din circuit au expresiile:

$$\begin{cases} u_R(t) = E \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \\ u_L(t) = E e^{-\frac{t}{\tau}} \end{cases} \quad (5.14)$$

Curentul din circuit și tensiunea pe rezistor, respectiv inductanță sunt reprezentate în figura 5.2.

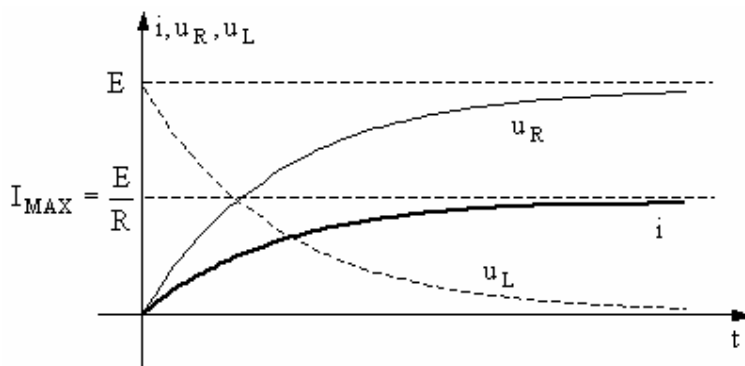


Fig.5.2 Stabilirea curentului continuu în circuitul R, L serie; Tensiunile de pe bobină, respectiv rezistor

Observație:

- Semnificația constantei de timp τ , se poate stabili din expresia (5.13), considerând $t = \tau$.

Valoarea curentului la acest moment este:

$$i(t = \tau) = I_{MAX} \left(1 - e^{-\frac{1}{\tau}\tau} \right) = I_{MAX} \left(1 - \frac{1}{e} \right) \approx 0.632 I_{MAX} \quad (5.15)$$

Conform (5.15) se poate spune că τ reprezintă timpul în care curentul din circuit atinge 63.2% din valoarea lui finală (valoarea maximă, I_{MAX}).

În figura 5.3 este reprezentată evoluția în timp a variației relative a curentului, $\left(\frac{i}{I_{MAX}} \right)$, punând în evidență valorile acesteia la diverse τ “momente”.

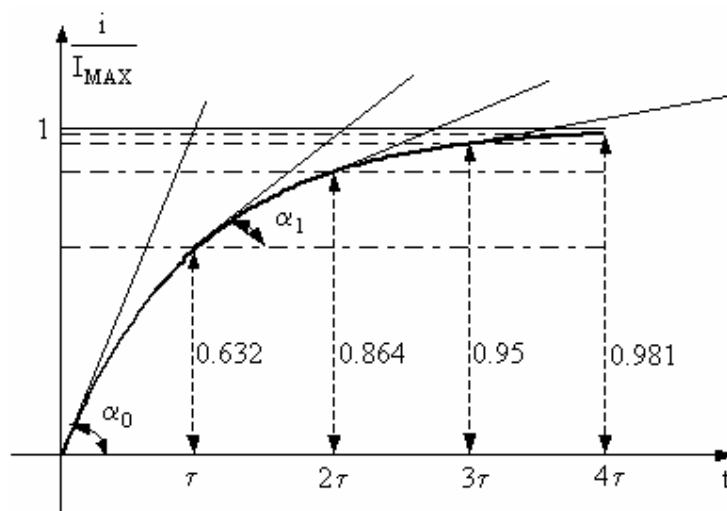


Fig.5.3 Variația în timp a curentului relativ în circuitul R, L serie (stabilirea curentului)

În figura 5.3 se pune în evidență viteza de creștere a curentului în circuit. Prin definiție viteza de creștere a curentului este:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{di}{dt} \quad (5.16)$$

Viteza maximă de creștere a curentului este viteza inițială, având valoarea:

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \left(\frac{di}{dt} \right)_{t=0} = \frac{E}{L} \quad (5.17)$$

În momentul închiderii circuitului nu doar viteza de creștere a curentului va fi maximă ci și tensiunea de pe inductanță, u_L .

$$(u_L)_{t=0} = L \left(\frac{di}{dt} \right)_{t=0} = E \quad (5.18)$$

Viteza de creștere a curentului scade continuu $\alpha_0 > \alpha_1 > \alpha_2 > \dots$, tinzând spre zero, pe măsură ce valoarea curentului se apropie asimptotic de valoarea finală $I_{MAX} = \frac{E}{R}$.

Timul după care curentul atinge a n-a parte din valoarea maximă se determină din relația:

$$i(t = t_n) = n I_{MAX} = I_{MAX} \left(1 - e^{-\frac{1}{\tau} t_n} \right) \quad (5.19)$$

de unde rezultă că:

$$t_n = -\tau \ln(1 - n) \quad (5.20)$$

Observație:

- În cazul în care $n = 90\% \Rightarrow t_n = \tau \ln 10 \approx 2.3 \tau$;
- În cazul în care $n = 95\% \Rightarrow t_n = \tau \ln 20 \approx 3 \tau$.

În figura 5.4 se prezintă variații ale curentului prin circuit, în cazul în care inductanța are diverse valori.

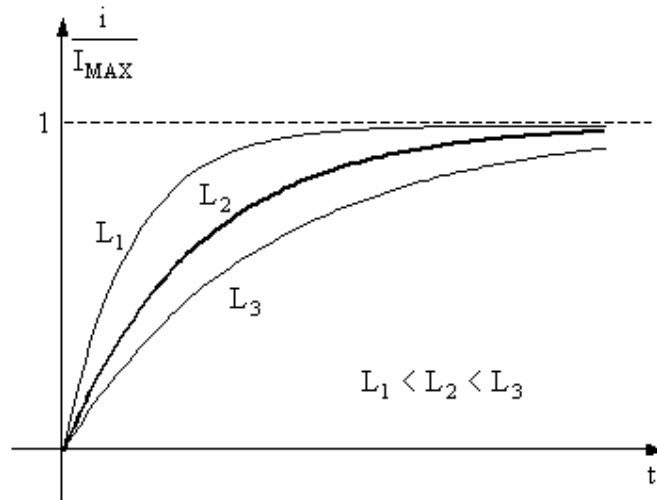


Fig.5.4 Stabilirea curentului continuu în diverse circuite R, L serie cu constante de tip diferite

Cu cât constanta de timp a circuitului este mai mare, cu atât curentul se stabilește mai lent, înmagazinarea unei energii mai mari, proporționață cu L , necesitând un timp mai îndelungat.

5.1.1.2. Stingerea curentului prin circuit.

Comutatorul K_1 deschis, respectiv K_2 închis. În acest caz rezistorul R și bobina L nu mai sunt conectate la sursa de tensiune continuă E . Se observă că circuitul RL se închide (cale pentru curentul i) prin comutatorul K_2 .

Pentru a determina expresiile curentului și a tensiunilor, se scriu ecuațiile ce descriu circuitul.

$$\begin{cases} u_R = R i \\ u_L = L \frac{di}{dt} \\ 0 = u_R + u_L \end{cases} \quad (5.21)$$

condiția inițială fiind:

$$i(0) = \frac{E}{R} = I_{MAX} \quad (5.22)$$

Determinarea expresiilor tensiunilor și a curentului prin circuit impune rezolvarea unei ecuații diferențiale unei ecuații diferențiale omogene de gradul I, ce are forma:

$$L \frac{di}{dt} + R i = 0 \quad (5.23)$$

sau $\frac{di}{dt} + \frac{1}{\tau} i = 0$, ce are soluția

$$i(t) = K e^{-\frac{1}{\tau} t} \quad (5.24)$$

unde K este constanta de integrare.

Din condiția inițială $i(0) = I_{MAX}$ rezultă că $K = \frac{E}{R}$, în final obținându-se că:

$$i(t) = \frac{E}{R} e^{-\frac{1}{\tau}t} = I_{MAX} e^{-\frac{1}{\tau}t} \quad (5.25)$$

Tensiunile din circuit au expresiile:

$$\begin{cases} u_R(t) = E e^{-\frac{1}{\tau}t} \\ u_L(t) = -E e^{-\frac{1}{\tau}t} \end{cases} \quad (5.26)$$

Curentul, respectiv tensiunile din circuit sunt reprezentate în figura 5.5.

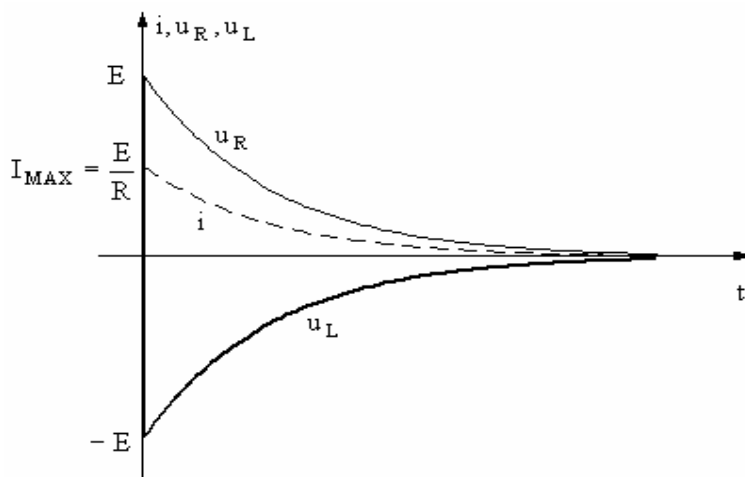


Fig.5.5. Variația în timp mărimilor u_R , u_L , i , în cazul stingerii curentului printr-un circuit RL în c.c.

Valoarea curentului la momentul $t = \tau$ este:

$$i(t = \tau) = I_{MAX} e^{-\frac{1}{\tau}\tau} = I_{MAX} \frac{1}{e} \approx 0.368 I_{MAX} \quad (5.27)$$

adică scade cu $0.632 I_{MAX}$

În figura 5.6 este reprezentată evoluția în timp a variației relative a curentului, (i/I_{MAX}) , punând în evidență valorile acesteia la diverse τ "momente".

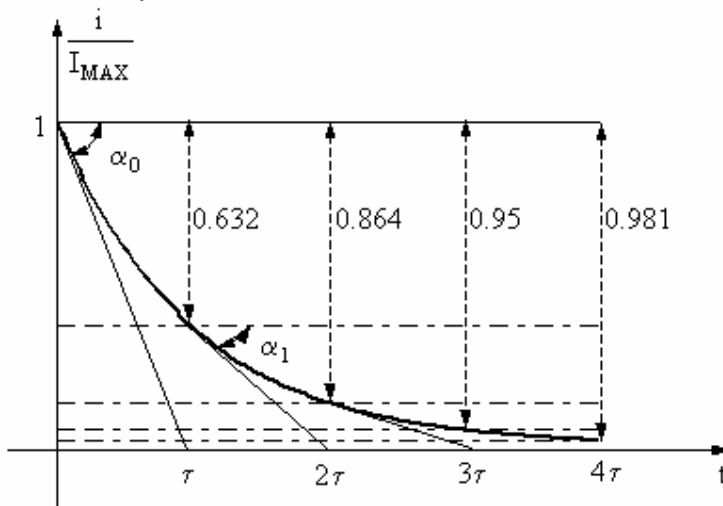


Fig.5.6 Variația în timp a curentului relativ în circuitul R, L serie (stingerea curentului)

În figura 5.6 se pune de asemenea în evidență viteza de stingere a curentului în circuit. La fel ca în cazul conectării bobinei (inductanță și rezistență) la tensiunea de alimentare, această viteză nu este constantă. Ea este maximă la momentul inițial (deconectarea tensiunii de alimentare), având expresia indicată de (5.17).

În momentul scurtcircuitării bobinei tensiunea de pe inductanță, u_L , are valoarea maximă (în modul).

$$(u_L)_{t=0} = L \left(\frac{di}{dt} \right)_{t=0} = -E \quad (5.28)$$

Viteza de scădere a curentului scade continuu tinzând spre zero, pe măsură ce valoarea curentului se apropie asimptotic de valoarea finală $i = 0$.

5.1.2. Circuitul R, C serie în c.c.

Schema circuitului R, C serie în c.c. este prezentată în figura 5.7

5.1.2.1. Încărcarea condensatorului (stabilirea curentului prin circuit).

Comutatorul K_1 închis, respectiv K_2 deschis. În acest caz rezistorul R și condensatorul C sunt conectate la sursa de tensiune continuă E.

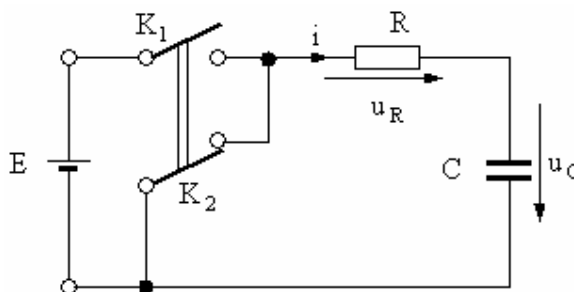


Fig.5.7 Circuitul R, C serie în c.c

Ecuțiile ce descriu circuitul, au forma:

$$\begin{cases} u_R = R i \\ u_C = \frac{1}{C} \int i dt \Rightarrow i = C \frac{du_C}{dt} \\ E = u_R + u_C \end{cases} \quad (5.29)$$

condiția inițială fiind:

$$u_C(0) = 0 \quad (5.30)$$

Determinarea expresiilor tensiunilor și a curentului prin circuit impune rezolvarea unei ecuații diferențiale unei ecuații diferențiale neomogene de gradul I, ce are forma:

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{RC} u_C = \frac{E}{RC} \quad (5.31)$$

Se rezolvă inițial ecuația omogenă

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{\tau} u_C = 0 \quad (5.32)$$

unde

$$\tau = RC \quad (5.33)$$

este constanta de timp a circuitului.

Observație:

- Se poate arăta simplu că această constantă de timp se măsoară în secunde.

$$[\tau] = [R][C] = \Omega F = \frac{V}{A} \frac{C}{V} = \frac{C}{A} = s$$

Soluția ecuației omogene este:

$$u_C(t) = K e^{-\frac{1}{\tau}t} \quad (5.34)$$

unde K este constanta de integrare.

Pentru a rezolva ecuația neomogenă (5.34) se aplică metoda variației constantelor (ca și în cazul circuitului R,L serie), obținându-se în final:

$$u_C(t) = E \left(1 - e^{-\frac{1}{\tau}t} \right) \quad (5.35)$$

Conform (5.29) și utilizând (5.12) expresiile tensiunii de pe rezistor, respectiv a curentului prin circuit devin:

$$\begin{cases} u_R(t) = E e^{-\frac{1}{\tau}t} \\ i(t) = I_{MAX} e^{-\frac{1}{\tau}t} \end{cases} \quad (5.36)$$

Curentul din circuit și tensiunea pe rezistor, respectiv condensator sunt reprezentate în figura 5.8.

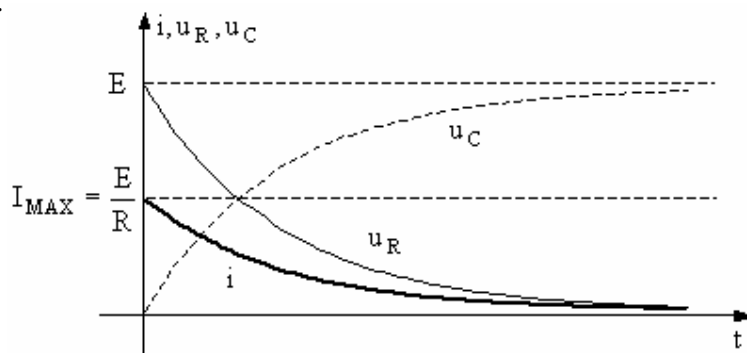


Fig.5.8 Stabilirea curentului continuu în circuitul R, C serie; Tensiunile de pe condensator, respectiv rezistor

Observație:

- Ca și în cazul circuitului RL serie se poate stabili semnificația constantei de timp τ considerând în expresia (5.36) relația $t = \tau$.

Valoarea curentului la acest moment este:

$$i(t = \tau) = I_{MAX} e^{-\frac{1}{\tau}\tau} = \frac{I_{MAX}}{e} \approx 0.368 I_{MAX} \quad (5.37)$$

Conform (5.37) se poate spune că τ reprezintă timpul în care curentul din circuit atinge 36.8% din valoarea lui inițială (valoarea maximă, I_{MAX}).

În figura 5.9 este reprezentată evoluția în timp a variației relative a curentului, $\left(\frac{i}{I_{MAX}}\right)$, punând în evidență valorile acestuia la diverse τ “momente”.

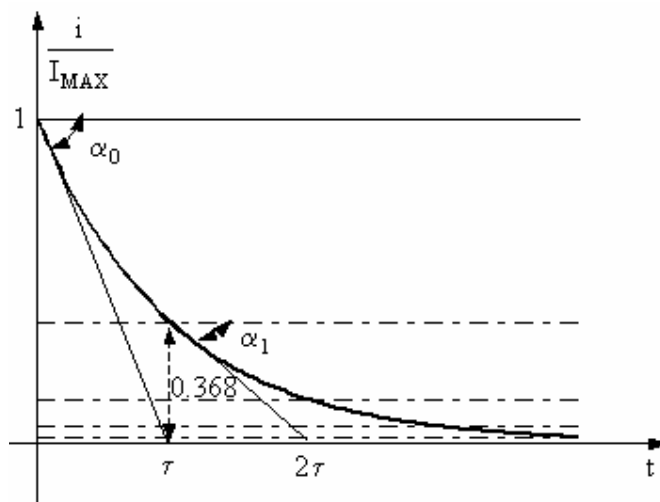


Fig.5.9 Variația în timp a curentului relativ în circuitul R, C serie (încărcarea condensatorului)

În momentul închiderii circuitului, conform (5.36) valoarea curentului este maximă. În consecință în circuit ar avea loc un salt de curent (instantaneu) de la valoarea de 0 amperi la o valoare $i = \frac{E}{R} = I_{MAX}$. Acest fenomen fizic nu are loc niciodată, curentul neputând atinge instantaneu valoarea de vârf, deoarece orice circuit real este caracterizat de o inductanță. În acest caz curentul prin circuit va crește rapid (cu cât valoarea inductanței este mai mică) până la valoarea maximă, ca apoi datorită încărcării condensatorului valoarea lui să scadă.

În figura 5.9 se pune în evidență variația vitezei de scădere a curentului din circuit. Viteza de descreștere a curentului scade continuu $\alpha_0 > \alpha_1 > \alpha_2 > \dots$, tinzând spre zero, pe măsură ce valoarea curentului se apropie asimptotic de valoarea finală $i(t)|_{t \rightarrow \infty} = 0$.

Timpul după care curentul atinge a n-a parte din valoarea maximă se determină din relația:

$$i(t = t_n) = n I_{MAX} = I_{MAX} e^{-\frac{1}{\tau} t_n} \quad (5.38)$$

de unde rezultă că:

$$t_n = -\tau \ln(n) \quad (5.39)$$

Observație:

- În cazul în care $n = 10\% \Rightarrow t_n = \tau \ln 10 \approx 2.3 \tau$;
- În cazul în care $n = 5\% \Rightarrow t_n = \tau \ln 20 \approx 3 \tau$.

Important:

- Se observă dualismul comportării curentului în cazul studierii circuitului RC serie comparativ cu circuitul RL serie atunci când are loc conectarea condensatorului/bobinei la tensiune continuă;

- În cazul circuitului RL serie, **curentul crește** spre valoarea de regim permanent (în acest caz valoare maximă, $I_{MAX} = \frac{E}{R}$), **viteza de creștere** depinzând de constanta de timp $\tau = \frac{L}{R}$; atingerea unei valori de se 95% din valoarea de regim permanent are loc după un interval de timp $t_{95\%} \approx 3\tau$.
- În cazul circuitului RC serie, **curentul scade** spre valoarea de regim permanent (în acest caz valoarea este zero) de la valoarea maximă $I_{MAX} = \frac{E}{R}$, **viteza de descreștere** depinzând de constanta de timp $\tau = RC$; atingerea unei valori de se 5% din valoarea de regim permanent are loc după un interval de timp $t_{5\%} \approx 3\tau$.

Analiza comportării circuitului RC serie în c.c. se poate realiza și prin studiul variației tensiunii de pe condensator.

În figura 5.10 este reprezentată evoluția în timp a variației relative a tensiunii de pe condensator, $\frac{u_C(t)}{E}$, punând în evidență valorile acesteia la diverse τ "momente".

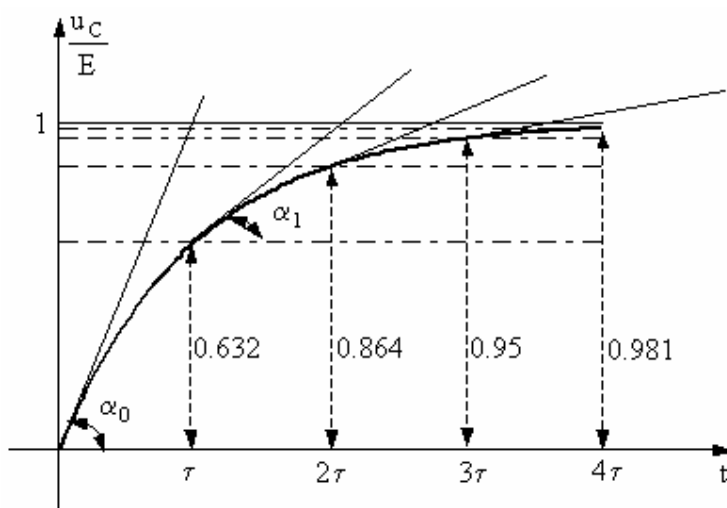


Fig.5.10 Variația în timp a tensiunii de pe condensator (variație relativă) în circuitul R, C serie (încărcarea condensatorului)

Timpul după care tensiunea de pe condensator atinge a n-a parte din valoarea maximă se determină din relația:

$$u_C(t = t_n) = nE = E e^{-\frac{1}{\tau}t_n} \quad (5.40)$$

de unde rezultă că:

$$t_n = -\tau \ln(1 - n) \quad (5.41)$$

Observații:

- Dualitatea circuitelor RC serie, respectiv RL serie rezultă și mai clar din compararea modului de variație a curentului (în circuitul RL serie) cu cel de variație a tensiunii de pe condensator (în circuitul RC serie); Calitativ, reprezentările grafice din figurile 5.3, respectiv 5.10 sunt identice.

➤ Expresiile (5.20) și (5.41) sunt identice, confirmând interpretarea unitară a semnificației fizice a constantei de timp a celor două circuite.
În figura 5.11 se prezintă variații ale tensiunii de pe condensator, în cazul în care capacitatea are diverse valori.

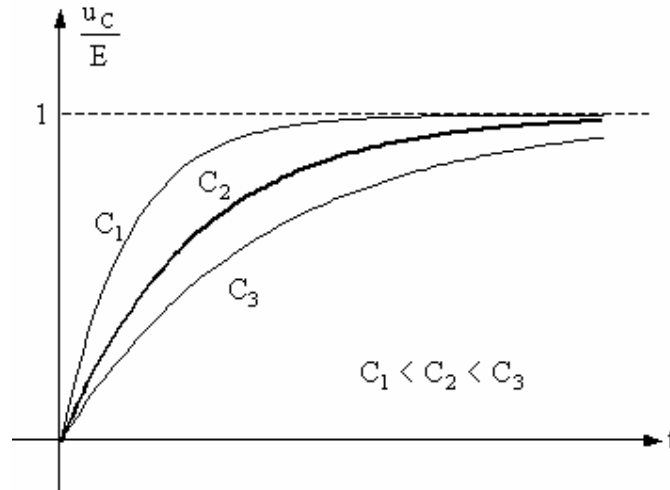


Fig.5.11 Variația tensiunii relative de pe condensator în diverse circuite R, C serie cu constante de tip diferite

5.1.2.2. Descărcarea condensatorului (stingerea curentului prin circuit)

Comutatorul K_1 deschis, respectiv K_2 închis. În acest caz rezistorul R și condensatorul C nu mai sunt conectate la sursa de tensiune continuă E. Se observă că circuitul RC se închide (cale pentru curentul i) prin comutatorul K_2 .

Pentru a determina expresiile curentului și a tensiunilor, se scriu ecuațiile ce descriu circuitul.

$$\begin{cases} u_R = R i \\ u_C = \frac{1}{C} \int i dt \Rightarrow i = C \frac{du_C}{dt} \\ u_R + u_C = 0 \end{cases} \quad (5.42)$$

condiția inițială fiind:

$$u_C(0) = E \quad (5.43)$$

Determinarea expresiilor tensiunilor și a curentului prin circuit impune rezolvarea unei ecuații diferențiale omogene de gradul I, ce are forma:

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{RC} u_C = 0 \quad (5.44)$$

sau $\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{\tau} u_C = 0$, ce are soluția

$$u_C(t) = K e^{-\frac{1}{\tau} t} \quad (5.45)$$

unde K este constanta de integrare.

Din condiția inițială $u_C(0) = E$ rezultă că $K = E$, în final obținându-se că:

$$u_C(t) = E e^{-\frac{1}{\tau} t} \quad (5.46)$$

Conform (5.42) expresiile tensiunii de pe rezistor, respectiv a curentului prin circuit devin:

$$\begin{cases} u_R(t) = -E e^{-\frac{t}{\tau}} \\ i(t) = -I_{MAX} e^{-\frac{t}{\tau}} \end{cases} \quad (5.47)$$

Curentul, respectiv tensiunile din circuit sunt reprezentate în figura 5.12.

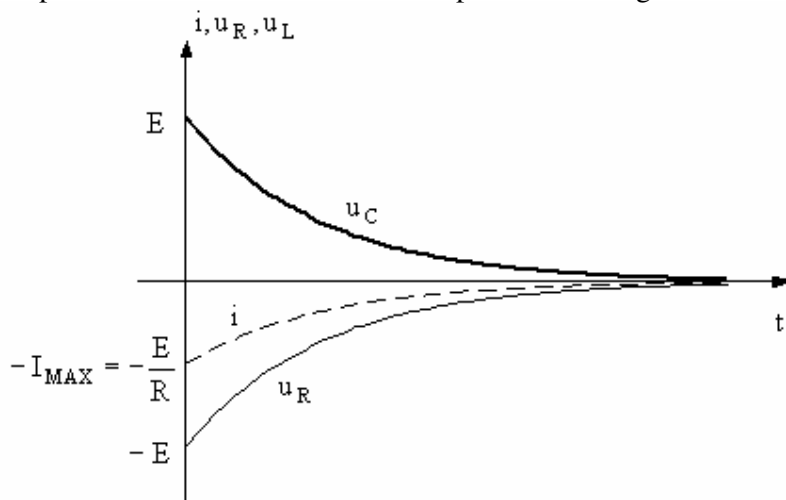


Fig.5.12. Variația în timp mărimilor u_R , u_L , i , în cazul stingerii curentului (descărcării condensatorului) printr-un circuit RC în c.c.

Valoarea tensiunii de pe condensator la momentul $t = \tau$ este:

$$u_C(t) = E e^{-\frac{t}{\tau}} \quad u_C(t = \tau) = E e^{-\frac{1}{\tau} \tau} = E \frac{1}{e} \approx 0.368 E \quad (5.48)$$

În figura 5.13 este reprezentată evoluția în timp a variației relative a tensiunii de pe condensator, (u_C / E) , punând în evidență valorile acesteia la diverse τ "momente".

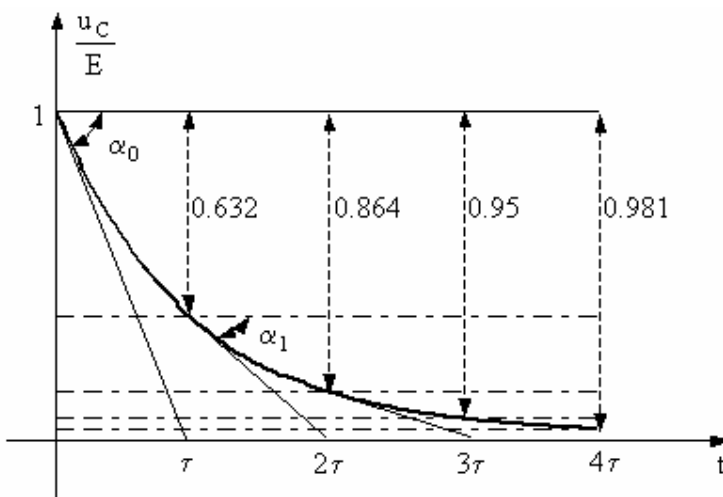


Fig.5.13 Variația în timp a tensiunii de pe condensator (variație relativă) în circuitul R, C serie (descărcarea condensatorului)

La fel ca în cazul încărcării condensatorului, viteză de descărcare a acestuia nu este constantă.

5.2. Circuite de derivare (diferențiere)

Definiție:

- Circuitul la ieșirea căruia se obține o tensiune proporțională în orice moment cu derivata tensiunii aplicate la intrare se numește circuit de diferențiere (circuit de derivare).

Matematic, unui circuit de derivare îi poate fi atașată următoarea relație matematică:

$$u_0(t) = K \frac{du_i}{dt} \quad (5.49)$$

Un asemenea circuit pune în evidență viteză de variație a mărimii (tensiunii) de la intrare.

Cum derivata unei funcții, într-un punct oarecare al ei, reprezintă panta curbei în acel punct, rezultă că tensiunea de la ieșirea unui circuit de derivare reprezintă variația în timp a pantei formei de undă a tensiunii de la intrare.

În cursul de față se prezintă un studiu al circuitelor de derivare doar în cazul în care semnalul (tensiunea) de intrare este de tip dreptunghiular.

Circuitele de derivare se pot construi pe baza legilor de încărcare/descărcare a unui condensator sau de stabilire/stingere a curentului printr-o bobină.

$$\begin{cases} i = C \frac{du_C}{dt} \\ u_L = L \frac{di}{dt} \end{cases}$$

În consecință se vor prezenta două circuite de derivare: circuitul RC, respectiv RL

5.2.1. Circuitul de derivare R,C

Schema circuitului de derivare R, C este prezentată în figura 5.14.

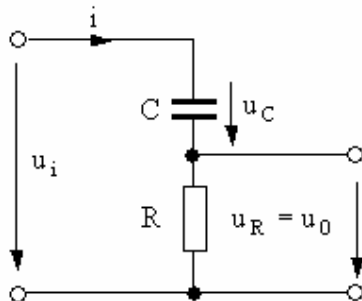


Fig.5.14 Circuitul de derivare R, C

Definiție:

- Semnalul (tensiunea) de la ieșire se culege de pe rezistorul R.

Ecuțiile ce descriu circuitul sunt următoarele:

$$\begin{cases} u_i = u_R + u_C \\ u_0 = u_R \end{cases} \quad (5.50)$$

În cazul în care

$$u_C \gg u_R \quad (5.51)$$

ecuațiile circuitului devin:

$$\begin{cases} u_i \approx u_C \\ u_0 = u_R \end{cases} \quad (5.52)$$

Din (5.29) și (5.52) se poate scrie că:

$$\begin{cases} u_R = R i \\ i = C \frac{du_C}{dt} \end{cases} \Rightarrow u_0 \approx Ri = RC \frac{du_C}{dt} \approx RC \frac{du_i}{dt}$$

rezultând că:

$$u_0 \approx \tau \frac{du_i}{dt} \quad (5.53)$$

Observație:

- Deoarece semnalul de intrare este un semnal periodic dreptunghiular de perioadă T , condiția (5.51) devine:

$$\tau \ll T \quad (5.54)$$

Considerând că tensiunea de intrare are expresia

$$u_i(t) = \begin{cases} E & t \in [0, t_1] \\ 0 & t \in (t_1, T] \end{cases}$$

conform (5.36) și (5.47), tensiunea de la ieșire are expresia:

$$u_0(t) = \begin{cases} E e^{-\frac{1}{\tau}t} & t \in [0, t_1] \\ -E e^{-\frac{1}{\tau}(t-T)} & t \in (t_1, T] \end{cases} \quad (5.55)$$

În figura 5.15 sunt prezentate tensiunile de intrare, respectiv ieșire, în cazul unui circuit de derivare R,C.

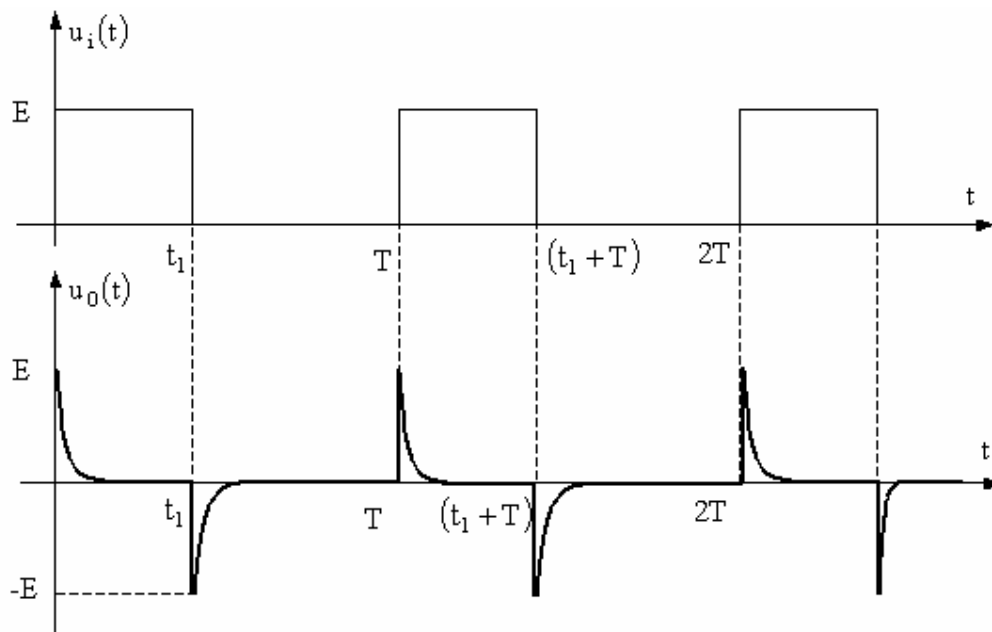


Fig.5.15 Tensiunile de intrare, respectiv ieșire pentru un circuit de derivare R, C

Observații:

- Pe fronturile crescătoare/descrescătoare ale semnalului de intrare, tensiunea de la ieșire atinge prin salt valoarea $E/-E$, scăzând apoi exponențial spre zero;
- Durata de scadere a tensiunii de ieșire depinde de viteza de încărcare/descărcare a condensatorului, care la rândul ei este condiționată de valoarea constantei de timp a circuitului, $\tau = RC$;
- Deoarece tensiunea de ieșire este culeasă de pe rezistor și deci $u_0 = u_R = Ri$, durata acestor impulsuri poate fi privită și ca durată de existență a curentului prin circuit (odată condensatorul încărcat la valoarea teoretică E , sau descărcat prin circuit nu mai circulă curent);
- Durata impulsurilor de ieșire poate fi aproximată funcție de valoarea constantei de timp a circuitului, astfel: se consideră condensatorul încărcat/descărcat dacă valoarea tensiunii de la bornele lui ajunge la 95% din valoarea amplitudinii E (în cazul încărcării condensatorului), sau la 5% din valoarea amplitudinii E (în cazul descărcării condensatorului). Conform (5.41) durata de stingere a impulsurilor de la ieșire are valoarea $t_r = \tau \ln 20 \approx 3\tau$;
- În cazul în care se dorește o evaluare mai exactă a duratei de stingere a impulsurilor de la ieșire se alege $t_r = t_{99\%} = \tau \ln 100 \approx 4.6\tau$;
- Pe baza observării formei semnalului de la ieșire și a analizei duratei de stingere a impulsurilor se poate înțelege de ce condiția (5.51), $u_C \gg u_R$ este echivalentă cu (5.54), $\tau \ll T$: pentru ca tensiunea de pe rezistor să fie mult mai mică (valoare medie pe o perioadă) decât tensiunea de pe condensator, este necesar ca durata de încărcare/descărcare a condensatorului să fie mult mai mică decât perioada T a semnalului de intrare. O comparație a tensiunii de pe condensator și de pe rezistor (tensiunea de ieșire) este prezentată în figura 5.16.

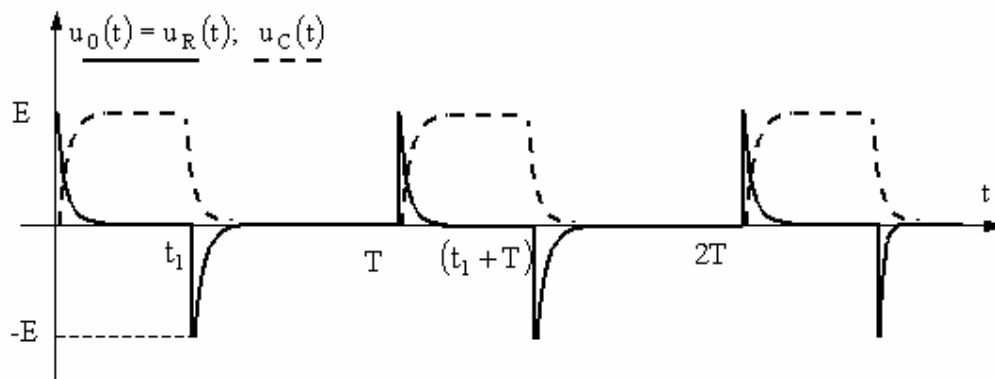


Fig.5.16 Tensiunile de pe condensator, respectiv de pe rezistor (ieșire) pentru un circuit de derivare R, C

Important:

- Nu orice circuit R,C poate fi utilizat ca circuit de derivație. Trebuie îndeplinite următoarele două condiții:
 1. Semnalul (tensiunea) de la ieșire se culege de pe rezistorul R;
 2. Constanta de timp a circuitului este mult mai mică decât perioada semnalului de intrare.

Pentru a utiliza un circuit R,C ca circuit de derivare se pot urmări două aspecte:

- Dacă circuitul este dat (valorile rezistenței și condensatorului sunt precizate) pentru a îndeplini condiția (5.51) se modifică parametrii semnalului de intrare (fie perioada T, fie durata impulsului t_1).
- Dacă semnalul de intrare este dat (frecvența, respectiv factorul de umplere sunt constante), pentru a îndeplini condiția (5.51) se modifică fie valorile rezistenței fie ale condensatorului (de preferat este a se modifica valoarea capacității).

Din (5.41), rezultă că lățimea semnalului de la ieșire (durata de stingere a impulsurilor t_r) este direct proporțională cu constanta de timp a circuitului.

În cazul în care se ia în calcul și rezistența internă a sursei de tensiune R_g schema circuitului de derivare este prezentată în figura 5.17.

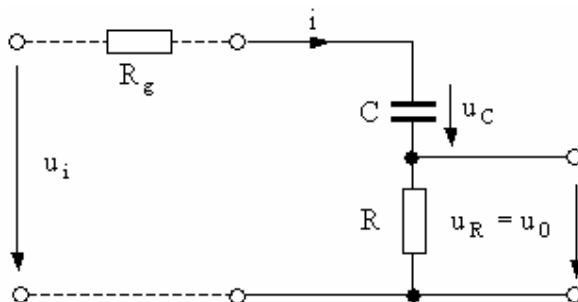


Fig.5.17 Circuit RC de derivare în care este inclusă și rezistența internă R_g a sursei

Noua constantă de timp a circuitului este:

$$\tau' = (R + R_g)C \quad (5.56)$$

În acest caz impulsul de la ieșire devine mai lat, amplitudinea lui, în momentul inițial scăzând – vezi figura 5.18 .

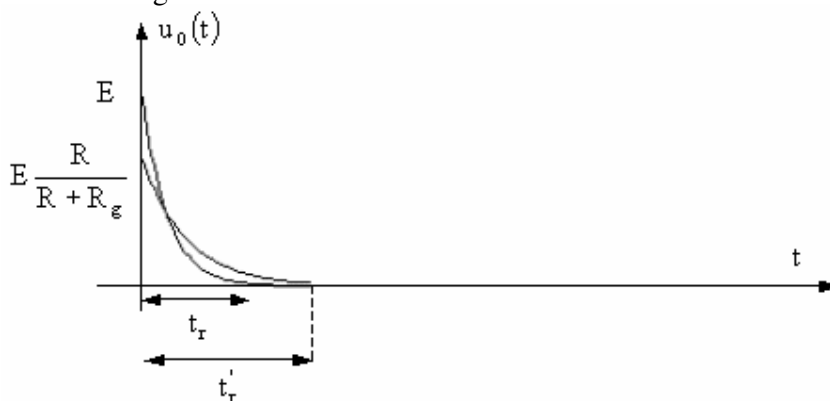


Fig. 5.18 Variația semnalului de la ieșirea unui circuit RC de derivare, funcție de rezistența internă a sursei.

5.2.2. Circuitul de derivare R,L

Schema circuitului de derivare R, L este prezentată în figura 5.19.

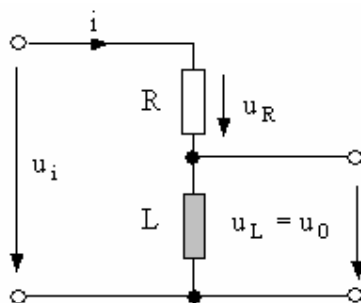


Fig.5.19 Circuitul de derivare R, L

Definiție:

- Semnalul (tensiunea) de la ieșire se culege de pe bobina L.

Ecuțiile ce descriu circuitul sunt următoarele:

$$\begin{cases} u_i = u_R + u_L \\ u_0 = u_L \end{cases} \quad (5.57)$$

În cazul în care

$$u_R \gg u_L \quad (5.58)$$

ecuațiile circuitului devin:

$$\begin{cases} u_i \approx u_R \\ u_0 = u_L \end{cases} \quad (5.59)$$

Din (5.21) și (5.59) se poate scrie că:

$$\begin{cases} u_R = R i \\ u_L = L \frac{di}{dt} \end{cases} \Rightarrow u_0 = L \frac{di}{dt} = \frac{L}{R} \frac{du_R}{dt} \approx \frac{L}{R} \frac{du_i}{dt} \quad (5.60)$$

rezultând că:

$$u_0 \approx \tau \frac{du_i}{dt} \quad (5.61)$$

Observație:

- Deoarece semnalul de intrare este un semnal periodic dreptunghiular de perioadă T, condiția (5.58) devine:

$$\tau \ll T \quad (5.62)$$

Considerând că tensiunea de intrare are expresia

$$u_i(t) = \begin{cases} E & t \in [0, t_1] \\ 0 & t \in (t_1, T] \end{cases}$$

conform (5.14) și (5.26), tensiunea de la ieșire are expresia:

$$u_0(t) = \begin{cases} E e^{-\frac{1}{\tau}t} & t \in [0, t_1] \\ -E e^{-\frac{1}{\tau}t} & t \in (t_1, T] \end{cases} \quad (5.63)$$

Expresiile tensiunii de la ieșirea unui circuit de derivare R,L sunt identice cu cele ale tensiunii de la ieșirea unui circuit de derivare R,C (se observă că (5.55) și (5.63) sunt identice). În consecință, formele de undă ale tensiunii de la ieșirea unui circuit de derivare R,L sunt aceleași cu cele obținute în cazul circuitului de derivare R,C.

5.2.3. Comparații între circuitele de derivare R,C și R,L

În tabelul 5.3.1. sunt prezentate comparativ cele două circuite de derivare.

Tab 5.3.1.

Comparație între circuitele de derivare R,C respectiv R,L.

	Circuit de derivare R,C	Circuit de derivare R,L
Constanta de timp a circuitului raportată la perioada semnalului de intrare	$\tau = RC \ll T$	$\tau = \frac{L}{R} \ll T$
Tensiune pe cele două componente	$u_R \ll u_C$	$u_L \ll u_R$
Semnalul (tensiunea) de intrare	$u_i = u_R + u_C \approx u_C$	$u_i = u_R + u_L \approx u_R$
Semnalul (tensiunea) de ieșire	$u_o = u_R \approx RC \frac{du_i}{dt}$	$u_o = u_L \approx \frac{L}{R} \frac{du_i}{dt}$

5.3. Circuite de integrare

Definiție:

- Circuitul la ieșirea căruia se obține o tensiune proporțională în orice moment cu integrala tensiunii aplicate la intrare se numește circuit de integrare.

Matematic, unui circuit de integrare îi poate fi atașată următoarea relație matematică:

$$u_o(t) = K \int u_i dt \quad (5.64)$$

Tensiunea de la intrare va reprezenta variația în timp a pantei pe care o are forma de undă a tensiunii de ieșire, invers ca la circuitul de derivare.

Circuitele de integrare se pot construi pe baza legilor de încărcare/descărcare a unui condensator sau de stabilire/stingere a curentului printr-o bobină.

$$\begin{cases} u_C = \frac{1}{C} \int i dt \Rightarrow i = C \frac{du_C}{dt} \\ u_L = L \frac{di}{dt} \end{cases}$$

În consecință se vor prezenta două circuite de integrare: circuitul RC, respectiv RL

5.3.1. Circuitul de integrare R,C

Schema circuitului de integrare R, C este prezentată în figura 5.20.

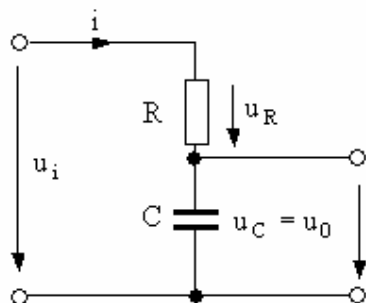


Fig.5.20 Circuitul de integrare R, C

Definiție:

- Semnalul (tensiunea) de la ieșire se culege de pe condensatorul C.

Ecuțiile ce descriu circuitul sunt următoarele:

$$\begin{cases} u_i = u_R + u_C \\ u_0 = u_C \end{cases} \quad (5.65)$$

În cazul în care

$$u_R \gg u_C \quad (5.66)$$

ecuațiile circuitului devin:

$$\begin{cases} u_i \approx u_R \\ u_0 = u_C \end{cases} \quad (5.67)$$

Din (5.29) și (5.67) se poate scrie că:

$$\begin{cases} u_R = R i \\ u_C = \frac{1}{C} \int i dt \end{cases} \Rightarrow u_0 = \frac{1}{C} \int i dt = \frac{1}{C} \int \frac{u_R}{R} dt \approx \frac{1}{RC} \int u_i dt$$

rezultând că:

$$u_0 \approx \frac{1}{\tau} \int u_i dt \quad (5.68)$$

Observație:

- Deoarece semnalul de intrare este un semnal periodic dreptunghiular de perioadă T, condiția (5.66) devine:

$$\tau \gg T \quad (5.69)$$

Considerând că tensiunea de intrare are expresia

$$u_i(t) = \begin{cases} E & t \in [0, t_1] \\ 0 & t \in (t_1, T] \end{cases}$$

conform (5.35) și (5.46), tensiunea de la ieșire are expresia:

$$u_0(t) = \begin{cases} E \left(1 - e^{-\frac{1}{\tau} t} \right) & t \in [0, t_1] \\ E e^{-\frac{1}{\tau} t} & t \in (t_1, T] \end{cases} \quad (5.70)$$

În figura 5.21 sunt prezentate tensiunile de intrare, respectiv ieșire, în cazul unui circuit de derivare R,C.

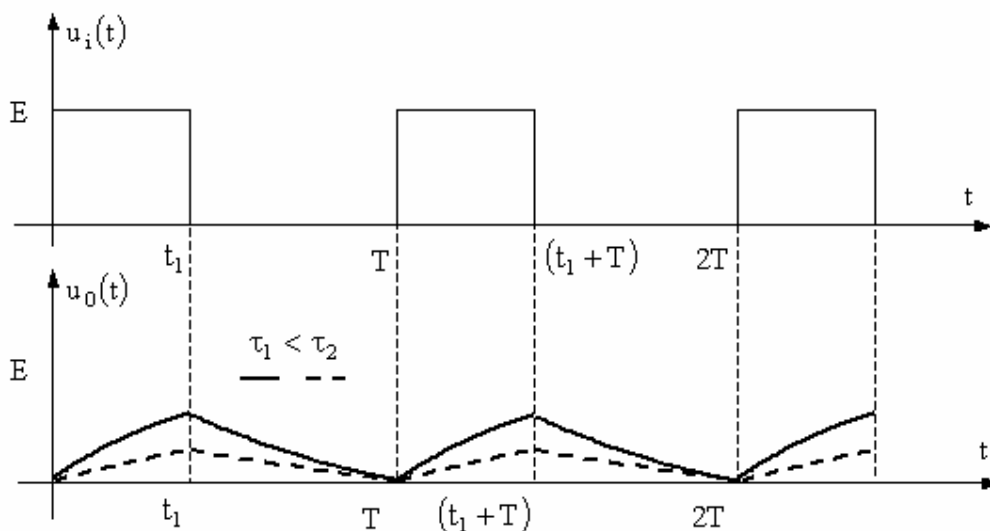


Fig.5.21 Tensiunile de intrare, respectiv ieșire pentru un circuit de derivare R, C

Observații:

- Pe fronturile crescătoare/descrescătoare ale semnalului de intrare, tensiunea de la ieșire variază lent, deoarece tensiunea de la bornele condensatorului nu se poate modifica brusc;
- Forma semnalului se la ieșire trebuie să fie cât mai puțin exponențială. Acest lucru se obține pentru o constantă de timp $\tau = RC$ de valoare mare. Durata de scaderă a tensiunii de ieșire depinde de viteza de încărcare/descărcare a condensatorului, care la rândul ei este condiționată de valoarea constantei de timp a circuitului, $\tau = RC$;
- Liniarizarea formei semnalului de la ieșire, apropierea de forma ideală dată de (5.68), duce la sacrificarea amplitudinii semnalului. După cum se observă din figura 5.21 semnalul de ieșire corespunzător valorii τ_2 este mai apropiat de curba ideală a ieșirii unui circuit de integrare decât semnalul de ieșire corespunzător valorii τ_1 , dar amplitudinea lui este mai mică;
- Durata impulsurilor de ieșire poate fi aproximată funcție de valoarea constantei de timp a circuitului la fel ca și în cazul circuitului de derivare;
- Pe baza observării formei semnalului de la ieșire și a analizei duratei de stingere a impulsurilor se poate înțelege de ce condiția (5.66), $u_R \gg u_C$ este echivalentă cu (5.69), $\tau \gg T$: pentru ca tensiunea de pe condensator să fie mult mai mică (valoare medie pe o perioadă) decât tensiunea de pe rezistență, este necesar ca durata de încărcare/descărcare a condensatorului să fie mult mai mare decât perioada T a semnalului de intrare. O comparație a tensiunii de pe condensator (tensiunea de ieșire) și de pe rezistor este prezentată în figura 5.22.

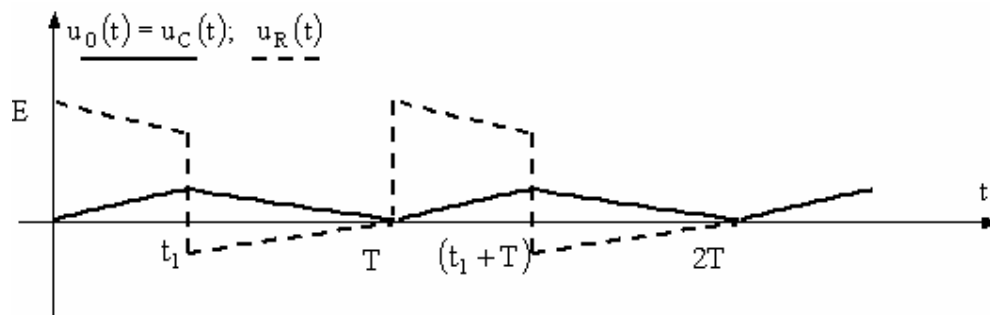


Fig.5.22 Tensiunile de pe rezistor, respectiv de pe condensator (ieșire) pentru un circuit de integrare R, C

Important:

- Nu orice circuit R,C poate fi utilizat ca circuit de integrare. Trebuie îndeplinite următoarele două condiții:
- 3. Semnalul (tensiunea) de la ieșire se culege de pe condensatorul C;
- 4. Constanta de timp a circuitului este mult mai mare decât perioada semnalului de intrare.

Pentru a utiliza un circuit R,C ca circuit de integrare se au în vedere aceleași două variante (ca și în cazul unui circuit de derivare): fie se modifică perioada semnalului de intrare (în acest caz T se va micșora), fie se modifica valoarea constantei de timp a circuitului (în acest caz τ se mărește).

5.3.2. Circuitul de integrare R,L

Schema circuitului de integrare R, L este prezentată în figura 5.23.

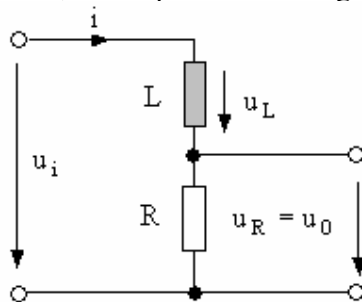


Fig.5.23 Circuitul de derivare R, L

Definiție:

- Semnalul (tensiunea) de la ieșire se culege de pe rezistorul R.

Ecuțiile ce descriu circuitul sunt următoarele:

$$\begin{cases} u_i = u_R + u_L \\ u_0 = u_R \end{cases} \quad (5.71)$$

În cazul în care

$$u_L \gg u_R \quad (5.72)$$

ecuațiile circuitului devin:

$$\begin{cases} u_i \approx u_L \\ u_0 = u_R \end{cases} \quad (5.73)$$

Din (5.21) și (5.73) se poate scrie că:

$$\begin{cases} u_R = R i \\ u_L = L \frac{di}{dt} \end{cases} \Rightarrow u_0 = \frac{R}{L} \int u_L dt \approx \frac{R}{L} \int u_i dt \quad (5.74)$$

rezultând că:

$$u_0 \approx \frac{1}{\tau} \frac{du_i}{dt} \quad (5.75)$$

Observație:

- Deoarece semnalul de intrare este un semnal periodic dreptunghiular de perioadă T , condiția (5.72) devine (5.69), adică $\tau \gg T$.

Considerând că tensiunea de intrare are expresia

$$u_i(t) = \begin{cases} E & t \in [0, t_1] \\ 0 & t \in (t_1, T] \end{cases}$$

conform (5.35) și (5.46), tensiunea de la ieșire are expresia:

$$u_0(t) = \begin{cases} E \left(1 - e^{-\frac{1}{\tau}t} \right) & t \in [0, t_1] \\ E e^{-\frac{1}{\tau}t} & t \in (t_1, T] \end{cases} \quad (5.76)$$

Expresiile tensiunii de la ieșirea unui circuit de integrare R,L sunt identice cu cele ale tensiunii de la ieșirea unui circuit de integrare R,C (se observă că (5.70) și (5.76) sunt identice). În consecință, formele de undă ale tensiunii de la ieșirea unui circuit de integrare R,L sunt aceleași cu cele obținute în cazul circuitului de integrare R,C.

5.3.3. Comparații între circuitele de integrare R,C și R,L

În tabelul 5.4.1. sunt prezentate comparativ cele două circuite de integrare.

Tab 5.4.1.

Comparație între circuitele de integrare R,C respectiv R,L.

	Circuit de integrare R,C	Circuit de integrare R,L
Constanta de timp a circuitului raportată la perioada semnalului de intrare	$\tau = RC \gg T$	$\tau = \frac{L}{R} \gg T$
Tensiune pe cele două componente	$u_R \gg u_C$	$u_L \gg u_R$
Semnalul (tensiunea) de intrare	$u_i = u_R + u_C \approx u_R$	$u_i = u_R + u_L \approx u_L$
Semnalul (tensiunea) de ieșire	$u_0 = u_C \approx \frac{1}{RC} \int u_i dt$	$u_0 = u_L \approx \frac{R}{L} \int u_i dt$

5.4. Circuite de separare

Definiție:

- Circuitul care permite trecerea componentei alternative a semnalului de intrare, blocând componenta continuă se numește circuit de separare.

Schema circuitului de separare este prezentată în figura 5.14.

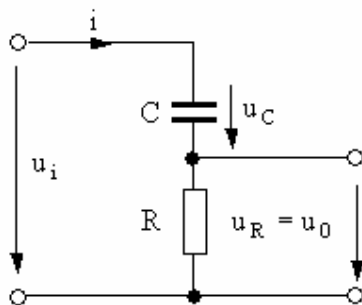


Fig.5.24 Circuitul de separare

Important

- Condiția pe care trebuie să o îndeplinească valorile componentelor circuitului de separare este:

$$\tau = RC \gg T \quad (5.77)$$

În figura 5.25 sunt prezentate tensiunile de intrare, respectiv ieșire, în cazul unui circuit de separare. În această figură este prezentat cazul ideal în care se presupune ca într-o semiperioadă condensatorul C nu își modifică sarcina (nu se încarcă sau se descarcă).

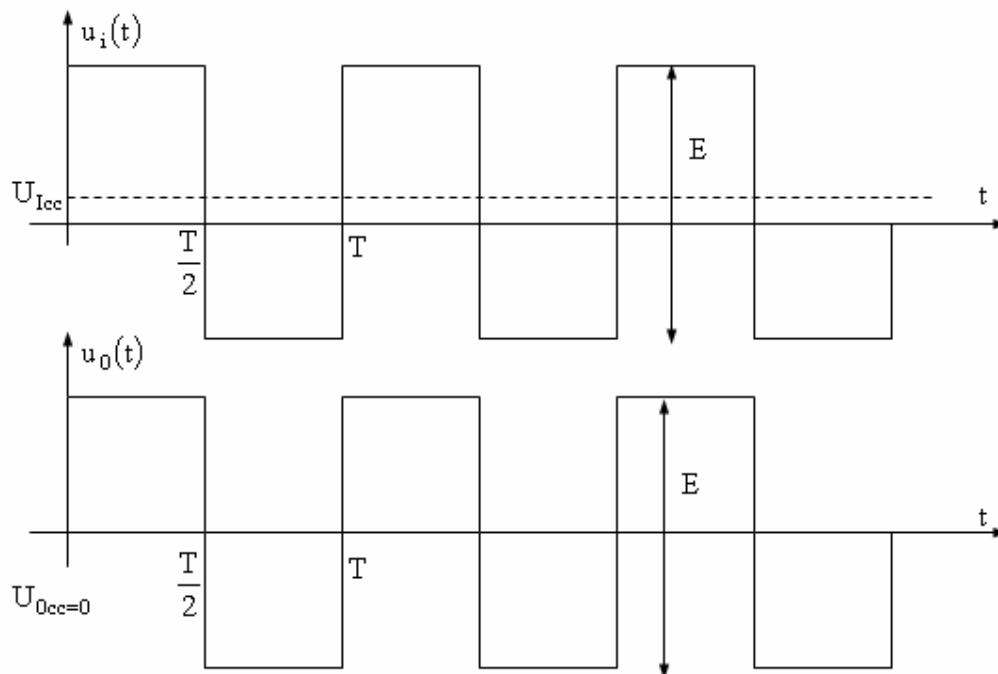


Fig.5.24 Tensiunile de intrare, respectiv ieșire pentru un circuit de separare ideal

Această variantă ideală a tensiunii de la ieșire are loc în cazul în care $\tau = RC \rightarrow \infty$. Se observă că tensiunea de la ieșire $u_0(t)$, are componenta continuă (valoarea medie) nulă $U_{0cc} = \frac{1}{T} \int_T u_0(t) dt = 0$, comparativ cu valoarea nenulă a componentei continue a tensiunii de intrare $U_{icc} \neq 0$.

Practic, oricât de mare ar fi τ , condensatorul C se mai descarcă, respective se mai încarcă puțin în anumite semiperioade, ceea ce face ca palierul tensiunii de la ieșire să nu mai fie orizontal – vezi figura 5.25. Cu cât condiția (5.77) este mai puțin îndeplinită, cu atât înclinarea palierului va fi mai mare și în plus, devine vizibil faptul că acesta este de fapt un segment de exponențială.

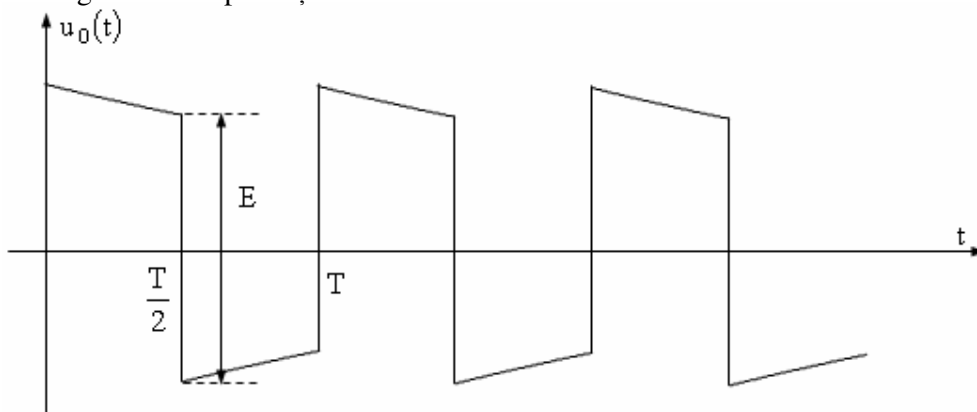


Fig.5.25 Tensiunea de ieșire pentru un circuit de separare în care constanta de timp nu este foarte mare

5.5. Circuite de limitare

Definiție:

- Circuitele de limitare se folosesc pentru a selecta o porțiune de dintr-un semnal sau pentru a limita amplitudinea semnalului de la ieșire la un nivel prestabilit.

În componența acestor circuite nu este necesară prezența vreunui element care să înmagazineze energia, ci se utilizează neliniaritatea caracteristicii unei diode.

5.5.1. Limitatoare de maxim

Circuitele de limitare de maxim limitează superior amplitudinea semnalului de la ieșire. În prezentul curs se prezintă două scheme de astfel de circuite: limitatoarele în care dioda este plasată în serie cu semnalul de intrare, respectiv în paralel cu aceasta. De asemenea se va analiza funcționarea doar în cazul în care semnalul de intrare este sinusoidal, deoarece tratarea teoretică este identică indiferent de forma semnalului de la intrare.

5.5.1.1. Limitatoare de maxim cu dioda în serie cu sursa de semnal

Schema electrică a circuitului de limitare de maxim cu dioda serie este prezentată în figura 5.26.

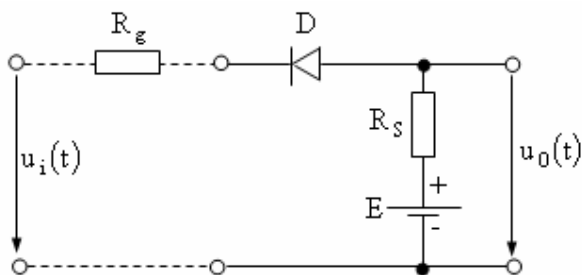


Fig.5.26 Circuit de limitare de maxim cu dioda serie

Notații:

$u_i(t)$ - semnalul de intrare; $u_o(t)$ - semnalul de ieșire; R_g - rezistența generatorului;

R_s - rezistența de sarcină (limitează curentul prin diodă); E - valoarea tensiunii de limitare.

Pentru a realiza un studiu al funcționării circuitului trebuie determinate valorile amplitudinii tensiunii de intrare pentru care dioda este în conducție, respectiv în stare de blocare. Pentru aceasta se consideră că dioda este blocată, vezi figura 5.27.

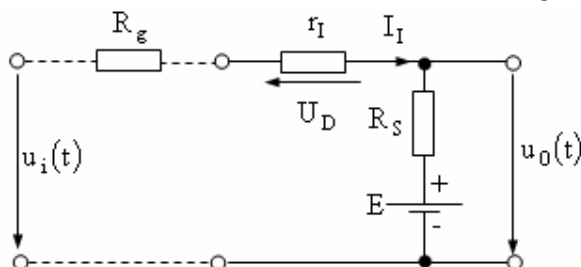


Fig.5.27 Schema echivalentă a limitatorului de maxim cu dioda serie în cazul în care dioda este blocată

Notații:

r_I - rezistența inversă a diodei (sute $M\Omega$); I_I - curentul invers prin diodă (pA, nA); U_D - valoarea tensiunii directe pe diodă.

Observație:

- În acest caz dioda este echivalată printr-o rezistență r_I , de valoare foarte mare străbătută de curentul invers I_I de valoare mică – vezi figura 5.28.



Fig.5.28 Schema echivalentă simplificată a unei diode blocate

Aplicând teorema a doua a lui Kirchhoff în circuitul din figura 5.27, rezultă că:

$$U_D = E - u_i(t) + (R_s + R_g)I_I$$

cum valoarea curentului I_I este foarte mică, tensiunea pe diodă poate fi aproximată prin relația:

$$U_D \approx E - u_i(t) \quad (5.78)$$

Funcționarea circuitului este dată de deschiderea și blocarea alternativă a diodei în funcție de amplitudinea semnalului de intrare și de valoarea tensiunii de limitare E .

Pentru ca dioda să conducă este necesar ca:

$$U_D > U_\gamma \quad (5.79)$$

unde U_γ este tensiunea de deschidere a diodei. Se reamintește faptul că:

$$U_\gamma \approx 0,7 \text{ V pentru diodele din Si; } U_\gamma \approx 0,2 \text{ V pentru diodele din Ge;}$$

Din (5.78) și (5.79) rezultă că:

- dioda este în stare de conducție dacă $u_i(t) < E - U_\gamma$ (5.80)

- dioda este în stare de blocare dacă $u_i(t) > E - U_\gamma$ (5.81)

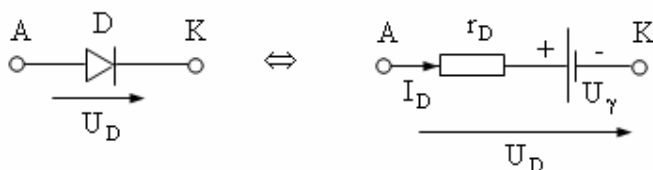
Observație:

- Pentru a se utiliza un asemenea circuit pe post de limitator de maxim este necesar ca $E < U_i$, unde U_i este amplitudinea semnalului de intrare.

În continuare se va calcula valoarea semnalului de la ieșire pentru cele două cazuri de funcționare ale diodei.

a) Determinarea semnalului de la ieșirea circuitului când dioda conduce

Pentru a determina forma semnalului la ieșirea circuitului când dioda conduce, se echivalează dioda cu o rezistență de valoare mică r_D , înseriată cu o sursă de tensiune continuă U_γ , vezi figura 5.29.



5.29 Schema echivalentă simplificată a unei diode în conducție

În acest caz (dioda este înlocuită cu schema ei echivalentă) circuitul de limitare este prezentat în figura 5.30.

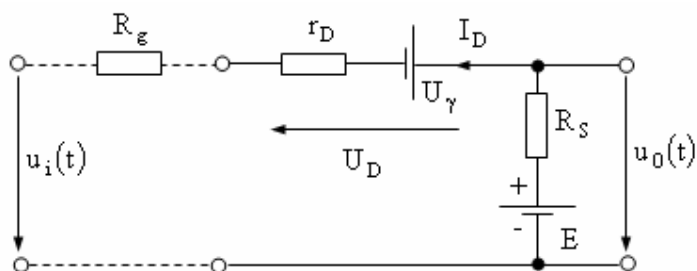


Fig.5.30 Schema echivalentă a limitatorului de maxim cu dioda serie în cazul în care dioda este în conducție

Aplicând teorema a doua a lui Kirchhoff în acest circuit rezultă că:

$$\begin{cases} u_i(t) - u_o(t) + U_\gamma + (r_D + R_g)I_D = 0 \\ u_o(t) - E + R_S I_D = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_D = \frac{E - u_o(t)}{R_S} \\ u_o(t) = \frac{R_S}{R_S + R_g + r_D} \left[u_i(t) + U_\gamma + \frac{R_g + r_D}{R_S} E \right] \end{cases}$$

Ținând cont de valorile rezistoarelor din circuit se poate scrie că

$$\begin{cases} R_g \ll R_S \\ r_D \ll R_S \end{cases},$$

de unde rezultă valoarea tensiunii de la ieșire pentru cazul în care dioda conduce.

$$u_o(t) \approx u_i(t) + U_\gamma \quad (5.82)$$

Observație:

- Forma semnalului de ieșire când dioda este în stare de conducție, este asemănătoare cu cea a semnalului de intrare.

b) Determinarea semnalului de la ieșirea circuitului când dioda este blocată

Pentru a determina forma semnalului la ieșirea circuitului când dioda este blocată, se utilizează circuitul de limitare din figura 5.30.

Aplicând teorema a doua a lui Kirchhoff rezultă că:

$$u_o(t) = E + R_S I_1$$

și datorită faptului că I_1 are o valoare foarte mică, tensiunea de la ieșire poate fi aproximată prin relația:

$$u_o(t) \approx E = ct \quad (5.83)$$

Observație:

- În acest caz (diodă blocată) apare fenomenul de limitare

Pentru a prezenta forma semnalelor de la ieșirea unui limitator de maxim cu dioda serie se apelează la ajutorul simulării în Pspice. Circuitul supus simulării este cel din figura 5.26.

1. Sursa de semnal generează un semnal sinusoidal cu următorii parametrii electrici:

$$U_i = 15V, f = 4kHz;$$

2. Se consideră că: $R_g = 50\Omega$, $R_S = 2k\Omega$, $E = 5V$

3. Dioda este din Ge.

4. Programul scris în editorul Notepad este următorul

Limitator de maxim cu dioda serie

u_i 1 0 sin 0V 5V 4kHz

R_g 1 2 50

D 3 2 DINT

R_s 3 4 2k

E 4 0 3V

.MODEL DINT D

.TRAN 20us 1ms 0s 1us

.PROBE

.END

Reprezentarea grafică a semnalelor considerate importante pentru analiza circuitului de limitare serie sunt prezentate în figura 5.31.

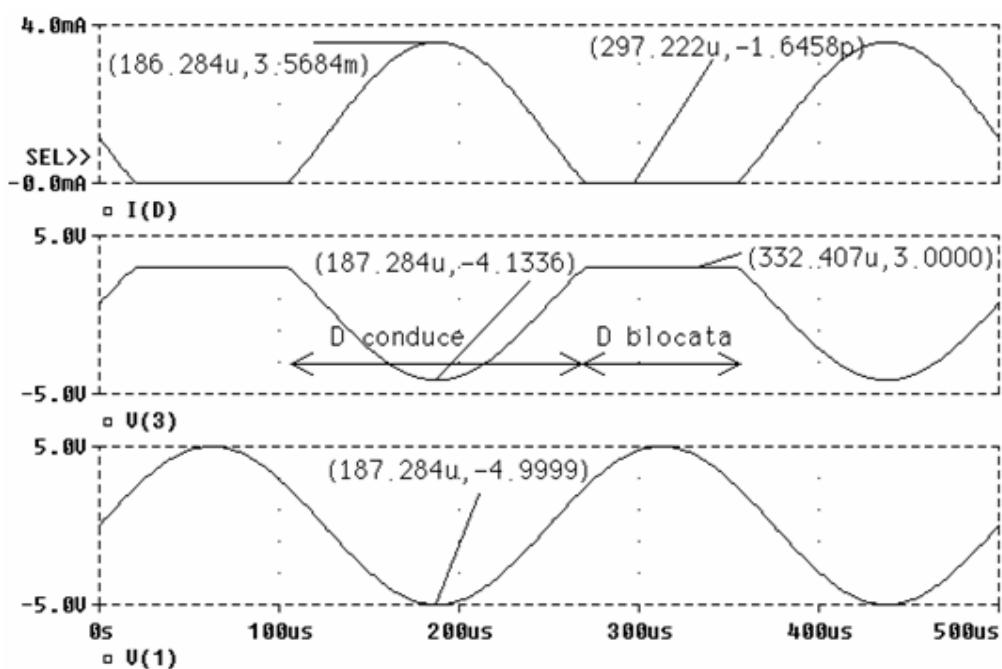


Fig. 5.31 Vizualizarea semnalelor la un limitator de maxim cu dioda serie
 $V(1)$ – Tensiunea de la intrare; $V(3)$ – Tensiunea de la ieșire; $I(D)$ – Curentul prin diodă;

Observații:

- Pe grafice sunt notate zonele de conducție și de blocare a diodei;
- Pe durata de blocare a diodei, valoarea tensiunii de la ieșire este egală cu cea a tensiunii de limitare, $E = 3V$;
- Pe durata de conducție a diodei, semnalul de la ieșire $V(3)$ are forma semnalului de la intrare $V(1)$. Pentru a afla valoarea amplitudinii tensiunii de la ieșire, la un moment dat, se utilizează (5.82).

5.5.1.2. Limitatoare de maxim cu dioda în paralel cu sursa de semnal

Schema electrică a circuitului de limitare de maxim cu dioda paralel este prezentată în figura 5.32.

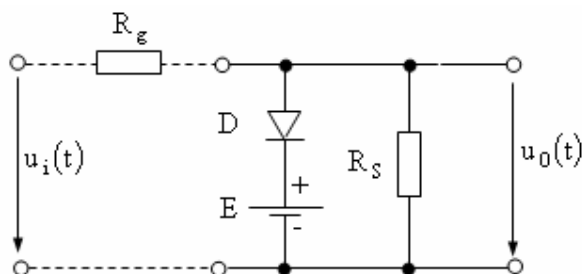


Fig.5.32 Circuit de limitare de maxim cu dioda paralel

Analog cu studiul limitatoarelor de maxim cu dioda în serie, trebuie determinate valorile amplitudinii tensiunii de intrare pentru care dioda este în conducție, respectiv în stare de blocare. Pentru aceasta se consideră că dioda este blocată, vezi figura 5.33.

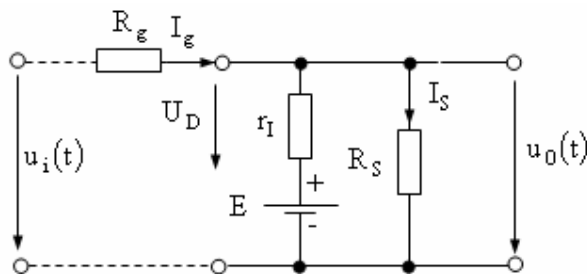


Fig.5.33 Schema echivalentă a limitatorului de maxim cu dioda paralel în cazul în care dioda este blocată

Aplicând teorema a doua a lui Kirchhoff în circuitul din figura 5.33 rezultă că:

$$U_D \approx u_i(t) - E - R_g I_g$$

datorită faptului că R_g are o valoare foarte mică, tensiunea pe diodă poate fi aproximată aproximată prin relația:

$$U_D \approx u_i(t) - E \quad (5.84)$$

Din (5.79) și (5.84) rezultă că:

$$\begin{aligned} &\text{➤ dioda este în stare de conducție dacă} \\ &u_i(t) > E + U_\gamma \quad (5.85) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{➤ dioda este în stare de blocare dacă} \\ &u_i(t) < E + U_\gamma \quad (5.86) \end{aligned}$$

Observație:

- Pentru a se utiliza un asemenea circuit pe post de limitator de maxim este necesar ca $E < U_i$, unde U_i este amplitudinea semnalului de intrare.

a) Determinarea semnalului de la ieșirea circuitului când dioda conduce

În acest caz (dioda este înlocuită cu schema ei echivalentă, vezi figura 5.29) circuitul de limitare este prezentat în figura 5.34

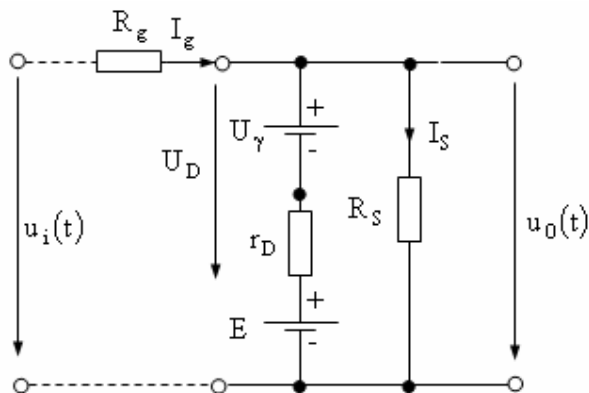


Fig.5.34 Schema echivalentă a limitatorului de maxim cu dioda paralel în cazul în care dioda este în conducție

Aplicând teorema a doua a lui Kirchhoff în acest circuit rezultă că:

$$u_0(t) - U_\gamma - E - r_D I_D = 0$$

Deoarece r_D are o valoare foarte mică rezultă că:

$$u_0(t) \approx E + U_\gamma \quad (5.87)$$

Observație:

- În acest caz apare fenomenul de limitare

b) Determinarea semnalului de la ieșirea circuitului când dioda este blocată

Pentru a determina forma semnalului la ieșirea circuitului când dioda este blocată, se utilizează circuitul de limitare din figura 5.33.

Aplicând teoremele lui Kirchhoff se obține:

$$\begin{cases} u_i(t) = u_0(t) + R_g I_g \\ I_s = I_i + I_g \end{cases}$$

Și datorită faptului că I_i și R_g au o valoare foarte mică, tensiunea de la ieșire poate fi aproximată prin relația:

$$u_i(t) \approx u_0(t) \quad (5.88)$$

Observație

- Forma semnalului de ieșire când dioda este în stare de conducție, este asemănătoare cu cea a semnalului de intrare.

Pentru a prezenta forma semnalelor de la ieșirea unui limitator de maxim cu dioda paralel se apelează la ajutorul simulării în Pspice. Circuitul supus simulării este cel din figura 5.32.

1. Valorile pieselor din circuit, precum și sursa de semnal sunt identice cu cele de la circuitul de limitare serie.

2. Programul scris în editorul Notepad este următorul

Limitator de maxim cu dioda paralel

u_i 1 0 sin 0V 10V 4kHz

R_g 1 2 50

D 2 3 DINT

R_s 2 0 2k

E 3 0 3V

.MODEL DINT D

.TRAN 20us 1ms 0s 1us

.PROBE

END

Reprezentarea grafică a semnalelor considerate importante pentru analiza circuitului de limitare paralel sunt prezentate în figura 5.35.

Observații:

- Pe grafice sunt notate zonele de conducție și de blocare a diodei;
- Pe durata de blocare a diodei, semnalul de la ieșire **V(2)** are forma semnalului de la intrare **V(1)**. Pentru a afla valoarea amplitudinii tensiunii de la ieșire, la un moment dat, se utilizează (5.88);
- Pe durata de conducție a diodei, valoarea tensiunii de la ieșire este egală conform (5.87) $u_0(t) \approx E + U_\gamma$, $E \approx 3,08V$;
- Pe durata de conducție a diodei, amplitudinea curentului prin diodă este mult mai mare ($I_{D\text{paralel}} \approx 26\text{mA}$), comparativ cu curentul prin diodă în cazul limitatorului cu dioda serie ($I_{D\text{serie}} \approx 3,5\text{mA}$), pentru aceeași valoare a rezistenței de sarcină.

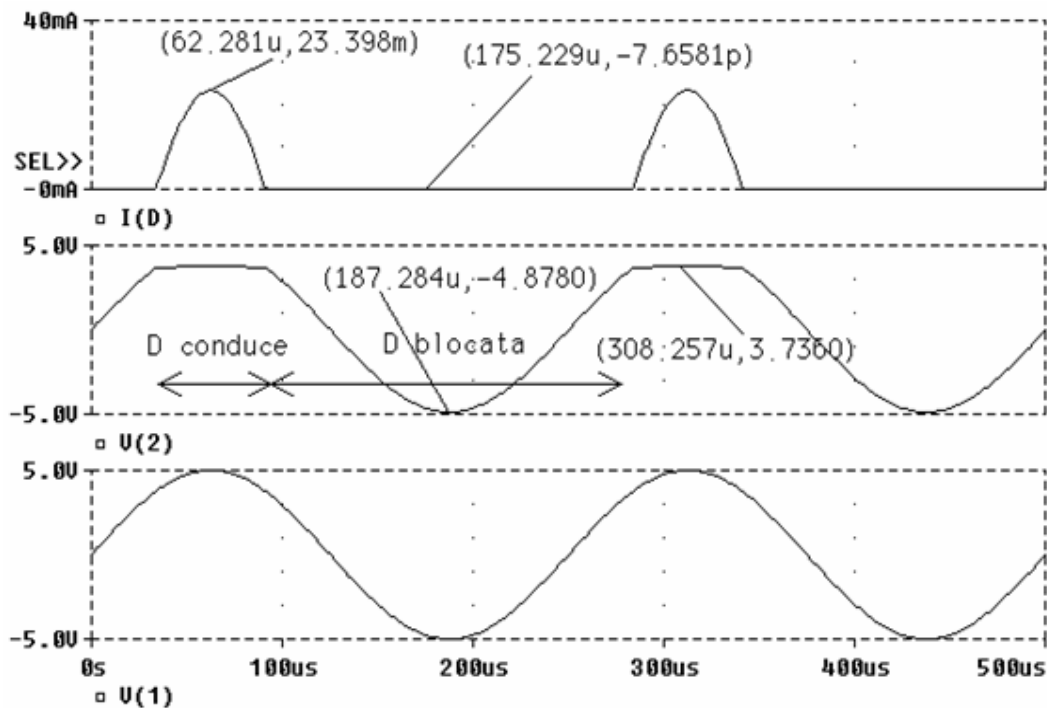


Fig. 5.35 Vizualizarea semnalelor la un limitator de maxim cu dioda paralel
V(1) – Tensiunea de la intrare; **V(2)** – Tensiunea de la ieșire; **I(D)** – Curentul prin diodă;

5.5.2. Limitatoare de minim

Circuitele de limitare de minim limitează inferior amplitudinea semnalului de la ieșire. Analog prezentării limitatoarelor de maxim, se vor prezenta prezintă două scheme: limitatoarele de minim în care dioda este plasată în serie cu semnalul de intrare, respectiv în paralel cu aceasta.

5.5.2.1. Limitatoare de minim cu dioda în serie cu sursa de semnal

Schema electrică a circuitului de limitare de minim cu dioda serie este prezentată în figura 5.36.

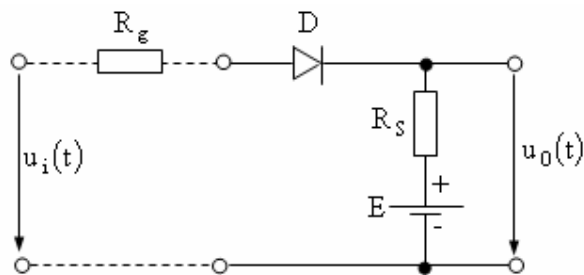


Fig.5.36 Circuit de limitare de minim cu dioda serie

Pentru a realiza un studiu al funcționării circuitului trebuie determinate valorile amplitudinii tensiunii de intrare pentru care dioda este în conducție, respectiv în stare de blocare. Pentru aceasta se consideră că dioda este blocată, vezi figura 5.37.

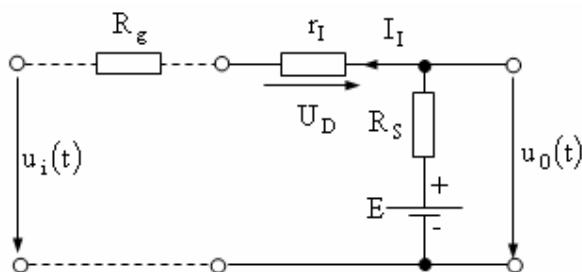


Fig.5.37 Schema echivalentă a limitatorului de minim cu dioda serie în cazul în care dioda este blocată

Aplicând teorema a doua a lui Kirchhoff în circuitul din figura 5.37, rezultă că:

$$U_D = u_i(t) - E + (R_s + R_g)I_D$$

cum valoarea curentului I_D este foarte mică, tensiunea pe diodă poate fi aproximată prin relația:

$$U_D \approx u_i(t) - E \quad (5.89)$$

Funcționarea circuitului este dată de deschiderea și blocarea alternativă a diodei în funcție de amplitudinea semnalului de intrare și de valoarea tensiunii de limitare E .

Din (5.79) și (5.89) rezultă că:

- dioda este în stare de conducție dacă

$$u_i(t) > E + U_\gamma \quad (5.90)$$

- dioda este în stare de blocare dacă

$$u_i(t) < E + U_\gamma \quad (5.91)$$

Observație:

- Pentru a se utiliza un asemenea circuit pe post de limitator de minim este necesar ca $E \ll U_i$, unde U_i este amplitudinea semnalului de intrare.

În continuare se va calcula valoarea semnalului de la ieșire pentru cele două cazuri de funcționare ale diodei.

a) Determinarea semnalului de la ieșirea circuitului când dioda conduce

În acest caz (dioda este înlocuită cu schema ei echivalentă) circuitul de limitare este prezentat în figura 5.38.

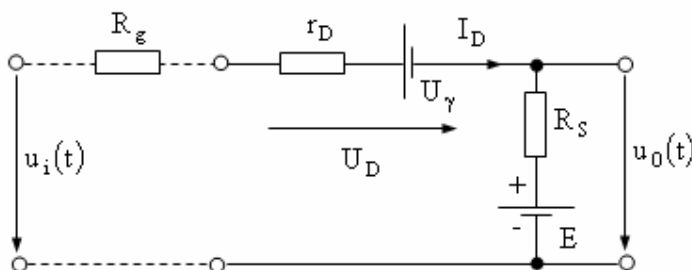


Fig.5.38 Schema echivalentă a limitatorului de minim cu dioda serie în cazul în care dioda este în conducție

Aplicând teorema a doua a lui Kirchhoff în acest circuit rezultă că:

$$\begin{cases} u_i(t) - u_o(t) - U_\gamma + (r_D + R_g)I_D = 0 \\ u_o(t) - E + R_S I_D = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_D = \frac{u_o(t) - E}{R_S} \\ u_o(t) = \frac{R_S}{R_S + R_g + r_D} \left[u_i(t) - U_\gamma + \frac{R_g + r_D}{R_S} E \right] \end{cases}$$

Ținând cont de valorile rezistoarelor din circuit se poate scrie că

$$\begin{cases} R_g \ll R_S \\ r_D \ll R_S \end{cases},$$

de unde rezultă valoarea tensiunii de la ieșire pentru cazul în care dioda conduce.

$$u_o(t) \approx u_i(t) - U_\gamma \quad (5.92)$$

Observație:

- Forma semnalului de ieșire când dioda este în stare de conducție, este asemănătoare cu cea a semnalului de intrare.

b) Determinarea semnalului de la ieșirea circuitului când dioda este blocată

Pentru a determina forma semnalului la ieșirea circuitului când dioda este blocată, se utilizează circuitul de limitare din figura 5.37.

Aplicând teorema a doua a lui Kirchhoff rezultă că:

$$u_o(t) = E - R_S I_1$$

și datorită faptului că I_1 are o valoare foarte mică, tensiunea de la ieșire poate fi aproximată prin relația:

$$u_o(t) \approx E = ct \quad (5.93)$$

Observație:

- În acest caz (diodă blocată) apare fenomenul de limitare

Pentru a prezenta forma semnalelor de la ieșirea unui limitator de maxim cu dioda serie se apelează la ajutorul simulării în Pspice. Circuitul supus simulării este cel din figura 5.36, ce are aceleași parametrii ca și în cazul circuitelor de maxim.

Reprezentarea grafică a semnalelor considerate importante pentru analiza circuitului de limitare serie sunt prezentate în figura 5.39.

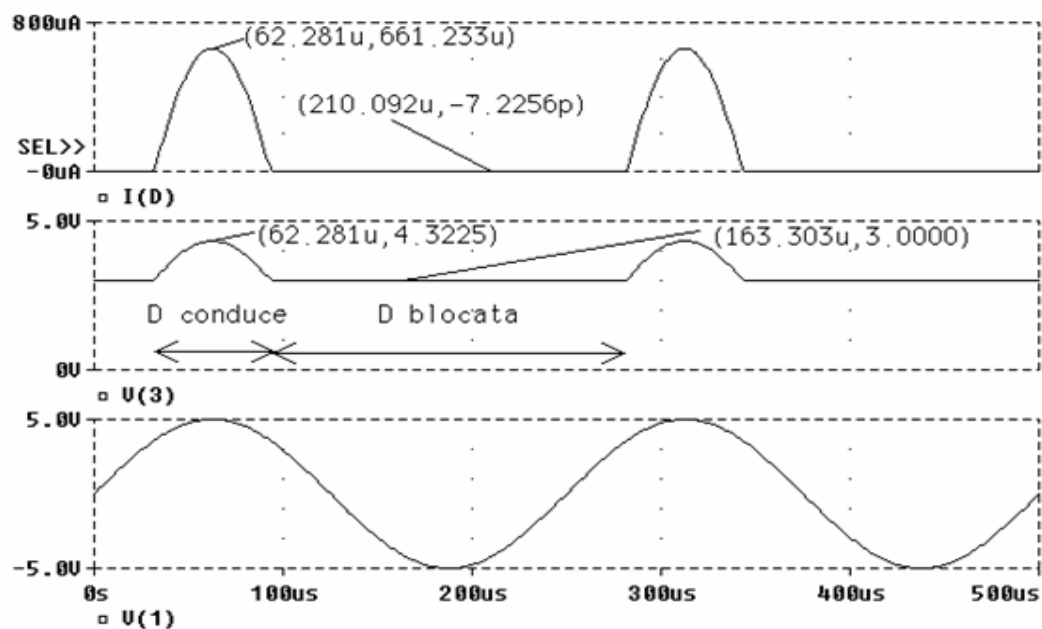


Fig. 5.39 Vizualizarea semnalelor la un limitator de minim cu dioda serie
V(1) – Tensiunea de la intrare; **V(3)** – Tensiunea de la ieșire; **I(D)** – Curentul prin diodă;

Observații:

- Pe grafice sunt notate zonele de conducție și de blocare a diodei;
- Pe durata de blocare a diodei, valoarea tensiunii de la ieșire este egală cu cea a tensiunii de limitare, $E = 3V$;
- Pe durata de conducție a diodei, semnalul de la ieșire **V(3)** are forma semnalului de la intrare **V(1)**. Pentru a afla valoarea amplitudinii tensiunii de la ieșire, la un moment dat, se utilizează (5.92).

5.5.2.2. Limitatoare de minim cu dioda în paralel cu sursa de semnal

Schema electrică a circuitului de limitare de minim cu dioda paralel este prezentată în figura 5.40.

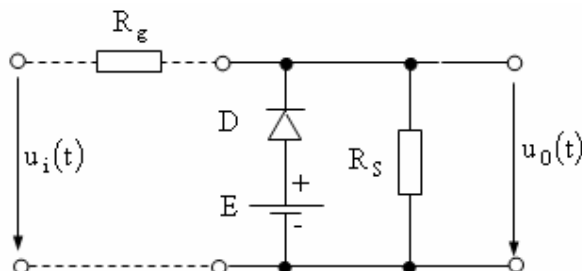


Fig.5.40 Circuit de limitare de minim cu dioda paralel

Analog cu studiul limitatoarelor de minim cu dioda în serie, trebuie determinate valorile amplitudinii tensiunii de intrare pentru care dioda este în conducție, respectiv în stare de blocare. Pentru aceasta se consideră că dioda este blocată, vezi figura 5.41.

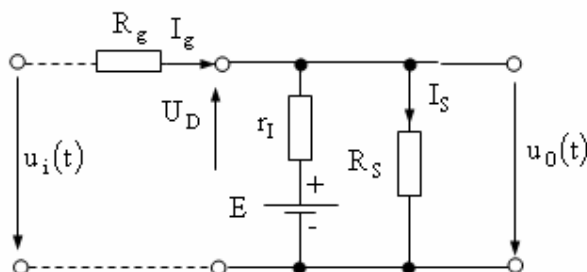


Fig.5.41 Schema echivalentă a limitatorului de minim cu dioda paralel în cazul în care dioda este blocată

Aplicând teorema a doua a lui Kirchhoff în circuitul din figura 5.33 rezultă că:

$$U_D \approx E - u_i(t) + R_g I_g$$

datorită faptului că R_g are o valoare foarte mică, tensiunea pe diodă poate fi aproximată aproximată prin relația:

$$U_D \approx E - u_i(t) \quad (5.94)$$

Din (5.79) și (5.94) rezultă că:

$$\begin{aligned} &> \text{dioda este în stare de conducție dacă} \\ &u_i(t) < E - U_\gamma \end{aligned} \quad (5.95)$$

$$\begin{aligned} &> \text{dioda este în stare de blocare dacă} \\ &u_i(t) > E - U_\gamma \end{aligned} \quad (5.96)$$

Observație:

- > Pentru a se utiliza un asemenea circuit pe post de limitator de maxim este necesar ca $E < U_i$, unde U_i este amplitudinea semnalului de intrare.

a) Determinarea semnalului de la ieșirea circuitului când dioda conduce

În acest caz (dioda este înlocuită cu schema ei echivalentă, vezi figura 5.29) circuitul de limitare este prezentat în figura 5.42.

Aplicând teorema a doua a lui Kirchhoff în acest circuit rezultă că:

$$u_o(t) + U_\gamma - E + r_D I_D = 0$$

Deoarece r_D are o valoare foarte mică rezultă că:

$$u_0(t) \approx E - U_\gamma \quad (5.97)$$

Observație:

- În acest caz apare fenomenul de limitare

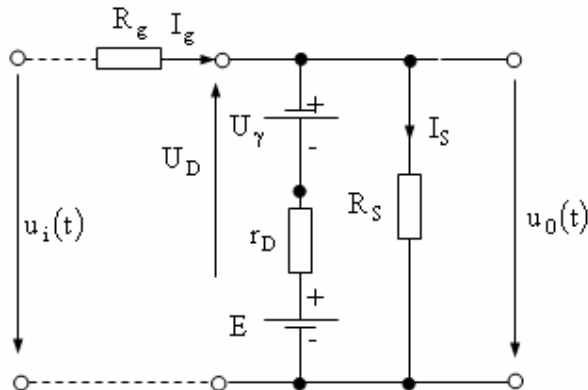


Fig.5.42 Schema echivalentă a limitatorului de minim cu dioda paralel în cazul în care dioda este în conducție

b) Determinarea semnalului de la ieșirea circuitului când dioda este blocată

Pentru a determina forma semnalului la ieșirea circuitului când dioda este blocată, se utilizează circuitul de limitare din figura 5.41.

Aplicând teoremele lui Kirchhoff se obține:

$$\begin{cases} u_i(t) = u_0(t) + R_g I_g \\ I_g = I_i + I_S \end{cases}$$

Și datorită faptului că I_i și R_g au o valoare foarte mică, tensiunea de la ieșire poate fi aproximată prin relația:

$$u_i(t) \approx u_0(t) \quad (5.98)$$

Observație

- Forma semnalului de ieșire când dioda este în stare de conducție, este asemănătoare cu cea a semnalului de intrare.

Pentru a prezenta forma semnalelor de la ieșirea unui limitator de maxim cu dioda serie se apelează la ajutorul simulării în Pspice. Circuitul supus simulării este cel din figura 5.40, ce are aceași parametrii ca și în cazul circuitelor de maxim.

Reprezentarea grafică a semnalelor considerate importante pentru analiza circuitului de limitare paralel sunt prezentate în figura 5.43.

Observații:

- Pe grafice sunt notate zonele de conducție și de blocare a diodei;
- Pe durata de blocare a diodei, semnalul de la ieșire $V(2)$ are forma semnalului de la intrare $V(1)$. Pentru a afla valoarea amplitudinii tensiunii de la ieșire, la un moment dat, se utilizează (5.98);
- Pe durata de conducție a diodei, valoarea tensiunii de la ieșire este egală conform (5.97) $u_0(t) \approx E - U_\gamma$, $E \approx 2,2V$;
- Pe durata de conducție a diodei, amplitudinea curentului prin diodă este mult mai mare ($I_{D\text{paralel}} \approx 187\text{ mA}$), comparativ cu curentul prin diodă în cazul limitatorului cu dioda serie ($I_{D\text{serie}} \approx 0,66\text{ mA}$), pentru aceeași valoare a rezistenței de sarcină.

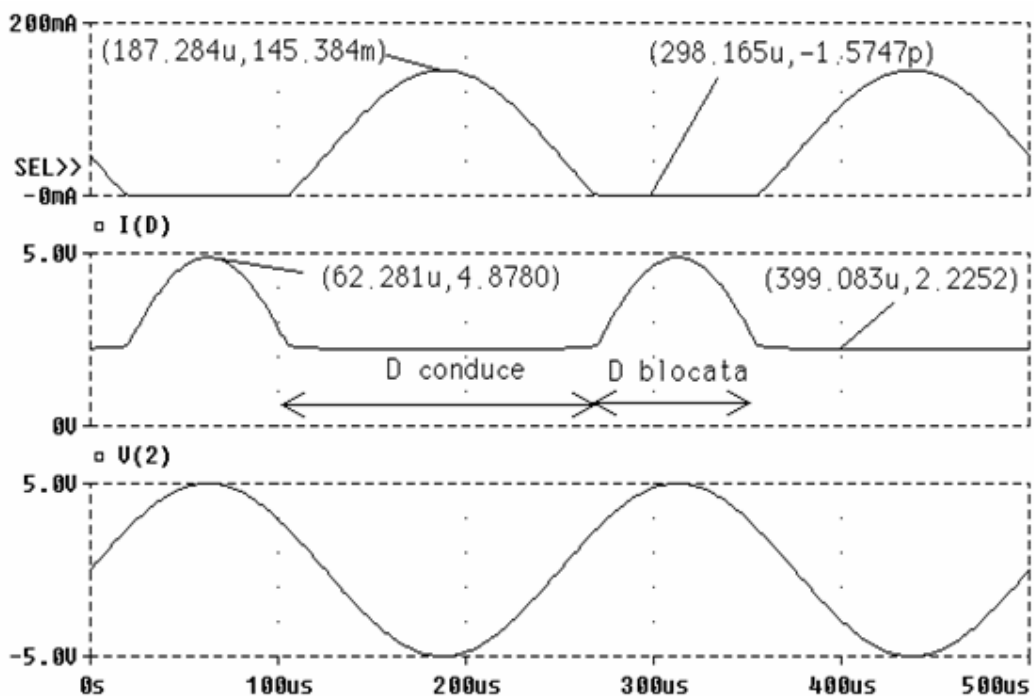


Fig. 5.43 Vizualizarea semnalelor la un limitator de minim cu dioda paralel
 $V(1)$ – Tensiunea de la intrare; $V(2)$ – Tensiunea de la ieșire; $I(D)$ – Curentul prin diodă;

BIBLIOGRAFIE

- [BID97] Bidian, D.: *Electrotehnică*, Editura Lux Libris, Braşov, 1997
- [CAR80] Cartianu, Gh., Săvescu, M., Constantin, I., Stanomir, D.: *Semnale, circuite şi sisteme*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1980
- [DAS82] Dascălu, D., Rusu, A., Profirescu, M., Costea, I.: *Dispozitive şi circuite electronice*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1982.
- [DĂN82] Dănilă, T., Reus, N.: *Dispozitive şi circuite electronice*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1982.
- [FEŞ90] Feştilă, L., Simion, E., Miron, C.: *Amplificatoare audio şi sisteme musicale*, Editura Dacia, Cluj- Napoca, 1990.
- [GRA73] Gray, P.E., Campbell, S. L.: *Bazele electronicii moderne, vol. I*: Editura Tehnică Bucureşti, 1973.
- [HOF84] Hoffman, I.: *Dispozitive şi circuite electronice*, Institutul Politehnic “Traian Vuia”, Timişoara, 1984.
- [MAI80] Maican, S.: *Sisteme numerice cu circuite integrate. Probleme*: Editura Tehnică, Bucureşti, 1980.
- [MAT97] Mateescu, A., Ciochină, S., Dumitru, N., Şerbănescu, Al., Stanciu, L.: *Prelucrarea numerică a semnalelor*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1997.
- [MAT79] Mateescu, A., Dumitru, N.: *Semnale şi circuite de telecomunicaţii*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1979.
- [MAT84] Mateescu, A.: *Semnale circuite şi sisteme*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1984.
- [MIR83] Miron, C.: *Introducere în circuite electronice*, Editura Dacia, Cluj- Napoca, 1983.
- [PAN97] Panta, A.: *Dispozitive şi circuite electronice*, Petroşani, 1997.
- [STR99a] Strîmbu, C., Constantinescu, C.G., Ştefan, A., Miron, M.: *Circuite Oscilante, Culegere de probleme*, Braşov, Editura Academiei Aviaţiei şi Apărării Antiaeriene “Henri Coandă”, 1999.
- [STR99b] Strîmbu, C., Constantinescu, C.G., Ştefan, A., Miron, M.: *Analiza spectrală a semnalelor neperiodice, culegere de probleme*, Braşov, Editura Academiei Aviaţiei şi Apărării Antiaeriene “Henri Coandă”, 1999.
- [STR99c] Strîmbu, C., Ştefan, A.: *Semnale şi Circuite Electronice, Îndrumar de Laborator*, Braşov, Editura Academiei Aviaţiei şi Apărării Antiaeriene “Henri Coandă”, 1999.
- [STR00a] Strîmbu, C., Ştefan, A.: *Analiza semnalelor cu PSPICE*, Editura Albastră, Cluj-Napoca, 2000.
- [STR00b] Strîmbu, C., Ştefan, A.: *Semnale şi Circuite Electronice, Îndrumar de Laborator, vol I, II*, Braşov, Editura Academiei Aviaţiei şi Apărării Antiaeriene “Henri Coandă”, Braşov, 2000.
- [STR00c] Strîmbu, C., Constantinescu, C.G., Ştefan, A., Miron, M., Bidu, E.L.: *Electronică, Îndrumar de Laborator vol I, II*, Braşov, Editura Academiei Aviaţiei şi Apărării Antiaeriene “Henri Coandă”, Braşov, 2000.
- [STR06] Strîmbu, C., Constantinescu, C.G.: *Electronică-ghid de pregătire a examenului de licenţă*, Braşov, Editura Academiei Forţelor Aeriene “Henri Coandă”, Braşov, 2006.

- [STR07] Strîmbu, C.: *ESemnale și circuite electronice - Analiza și prelucrarea semnalelor*, Brașov, Editura Academiei Forțelor Aeriene "Henri Coandă", Brașov, 2007.
- [ȘTE99] Ștefan, A., Strîmbu, C., Dumea, V.: *Semnale și Circuite Electronice, Curs, vol I*, Editura Academiei Aviației și Apărării Antiaeriene "Henri Coandă", Brașov, 1999.
- [SZT87] Sztojanov, J., Borcoci, E., Tomescu, N., Bulik, D., Petrec, M., Petrec, C.: *De la poarta TTL la microprocesor*, Editura Tehnică, București, 1987.
- [SZT97] Sztojanov, J., Pașca, S.: *Analiza asistată de calculator a circuitelor electronice*, Editura Teora, București, 1997.
- [TOA86] Toacșe, Gh.: *Introducere în microprocesoare*: Editura Științifică și Enciclopedică, București 1986
- [TOA96] Toacșe, Gh., Nicula, D.: *Electronică digitală*, Editura Teora, București, 1996.
- [TOM84] Toma, C.I., Gui, V., Oteșteanu, M.: *Dispozitive și circuite electronice*, Institutul Politehnic "Traian Vuia", Timișoara, 1984.
- [URS99] Ursuleanu, R., Suctiar, I.: *Elemente de electrotehnică și electronică*, Editura Satya, Iași, 1999.
- [VAS81] Vasilescu, G., Lungu, Ș.: *Electronică*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1981.